Licence de Sciences Économiques — Année 2004-2005
Université de Nice Sophia-Antipolis — Mathématiques L1

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

Exercice 1.

Exercice 2.
Nous avions posé $\alpha(p_1, p_2) = \dfrac{20 + 2p_1 - p_2}{3p_2}$.
Pour calculer la dérivée partielle de α par rapport à p_2, on fixe la variable p_1 et on dérive la fonction en $\mathbf{p_2}$. Dans ce cas, la fonction α est une fonction de la forme $\dfrac{u(p_2)}{v(p_2)}$ où $u(p_2) = 20 + 2p_1 - \mathbf{p_2}$ et $v(p_2) = 3\mathbf{p_2}$. On a alors

$$\frac{\partial\alpha}{\partial p_2} = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2} = \frac{(-1)\times 3p_2 - 3\times(20+2p_1-p_2)}{(3p_2)^2} = \boxed{(-2)\frac{10+p_1}{3p_2^2} < 0}.$$

Comme le signe de cette dérivée partielle est negatif, on sait que si p_2 croit, alors α décroit. Dans le contexte de l'énoncé cela signifie que si le prix de la lessive augmente, on n'en utilise moins (dans le cas 1). Etonnant, non ?
Si $p_1 = 2$ et $p_2 = 5$, on est dans le cas 1 : $2p_1 = 4 \leq 15 = 10 + p_2$. Dans ce cas, la quantité d'adoucissant achetée, pour une utilitée maximale, vaut

$$x_1^M = \frac{10 - 2p_1 + p_2}{3p_1} = \boxed{\frac{11}{6}} \simeq 2.$$

Et la quantité de lessive achetée vaut

$$x_2^M = \frac{20 + 2p_1 - p_2}{3p_2} = \boxed{\frac{19}{15}} \simeq 1,3.$$

Ce qui signifie que l'on utilise un peu plus d'adoucissant que de lessive.

Exercice 3.
Le calcul (sans calculatrice !) donne

$$f(-2) = \boxed{-86} \quad , \quad f(0) = \boxed{36} \quad \text{et} \quad f(1) = \boxed{-62}.$$

On conclut l'exercice en utilisant le **théorème des valeurs intermédiaires** :
Comme la fonction f est polynômiale, elle est <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f sur l'intervalle $[-2, 0]$ permet d'affirmer que toutes les valeurs entre -86 et 36 sont atteintes (au moins une fois) par f sur $[-2, 0]$, en particulier 0. En utilisant le même argument sur l'intervalle $[0, 1]$, on montre que la fonction f s'annule au moins une fois entre 0 et 1. (Faites un dessin, même grossier, de la fonction f pour vous convaincre qu'elle passe par 0).

Remarque : Sans la calculatrice, on a pu montrer rapidement des résultats sur la localisation des zéros de la fonction f.

Exercice 4.
Faites un dessin ! Un point fixe de la fonction f est un réel x pour lequel $f(x) = x$, cela correspond à un point où la courbe de f coupe la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$).

Posons g la fonction $[0,\, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. Pour conclure l'exercice, nous allons, encore une fois, utiliser le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue g sur $[0,\, 1]$. Comme $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$, alors on sait que g s'annule, au moins une fois, entre 0 et 1. C'est-à-dire, il existe $x \in [0,\, 1]$ tel que $g(x) = 0$, soit $f(x) = x$.

Erratum : L'hypothèse f croissante de l'énonce est inutile ici.

Exercice 5.
Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction f est composée d'applications continues, elle est donc continue.
Soit $x < y$.
Comme la fonction $x \mapsto x^3$ est croissante, on a $x^3 < y^3$.
Comme la fonction $x \mapsto -4x$ est décroissante, on a $-4y^3 < -4x^3$.
Comme la fonction $x \mapsto e^x$ est croissante, on a $e^{-4y^3} < e^{-4x^3}$, d'où $1 - e^{-4y^3} < 1 + e^{-4x^3}$
Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ est décroissante, on a

$$\boxed{\frac{2}{1 - e^{-4x^3}} = f(x) < f(y) = \frac{2}{1 + e^{-4y^3}}}.$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante.

La constante d'Euler e vaut environ $2,7$ donc $\dfrac{e}{2} \backsimeq 1,3$. Comme $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et comme la fonction f est croissante, on comprend pourquoi la fonction f "passera par" la valeur $\dfrac{e}{2}$. Pour justifier cela, nous allons utiliser le ... théorème des valeurs intermédiaires. Pour pouvoir l'appliquer, il nous faut un intervalle de la forme $[a,\, b]$. Prenons $a = 0$ et comme la fonction f tend vers 2 en $+\infty$, on sait qu'il existe un réel b tel que $f(b) > 1,9$ par exemple. Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f sur $[0,\, b]$ montre qu'il existe (au moins) un réel x tel que $f(x) = \dfrac{e}{2}$.
Comme la fonction f est strictement croissante, on peut appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour conclure qu'un tel x est unique.

Exercice 6.
Rappel : On rappelle les règles de calcul suivantes :

$$(\mathbf{a^b})^\mathbf{c} = \mathbf{a^{b.c}} \quad , \quad \mathbf{a^b.a^c} = \mathbf{a^{b+c}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
81^{\frac{1}{4}} &= (3^4)^{\frac{1}{4}} = 3^{4 \times \frac{1}{4}} = \boxed{3},\\
256^{\frac{3}{8}} &= (2^8)^{\frac{3}{8}} = 2^{8 \times \frac{3}{8}} = 2^3 = \boxed{8},\\
125^{-\frac{1}{3}} &= (5^3)^{-\frac{1}{3}} = 5^{3 \times (-\frac{1}{3})} = 5^{-1} = \boxed{\frac{1}{5}}.
\end{aligned}$$

Rappel : On rappelle les règles de calcul suivantes :

$$\ln(\mathbf{e^x}) = \mathbf{e}^{\ln \mathbf{x}} = \mathbf{x} \quad , \quad \ln\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right) = \ln \mathbf{a} - \ln \mathbf{b} \quad , \quad \ln(\mathbf{ab}) = \ln \mathbf{a} + \ln \mathbf{b} \quad , \quad \ln(\mathbf{a^b}) = \mathbf{b} \ln \mathbf{a}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\ln(e^{\frac{1}{2}}) + \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(4\sqrt{2}) - \ln 2 &= \frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 4 + \ln\sqrt{2} - \ln 2 \\
&= \frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^{\frac{1}{2}} - \ln 2 \\
&= \frac{1}{2} - \ln 2 + 2\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2 \\
&= \boxed{\frac{1}{2}(1 - \ln 2)}.
\end{aligned}$$

Exercice 7.

(1) Posons $X = e^x$. Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation (1) devient $2X^2 - 9X + 7 = 0$. Ce polynôme admet une racine simple $X = 1$ (pas besoin donc d'utiliser le *discriminant* Δ). Le polynôme $2X^2-9X+7$ se factorise de la manière suivante : $2X^2-9X+7 = (X-1)(2X-7)$. Les deux solutions en X sont $X = 1$ et $X = \frac{7}{2}$.

Dans le premier cas, on a $e^x = 1$ d'où $x = 0$. Et dans le deuxième cas, on a $e^x = \dfrac{7}{2}$ d'où $x = \ln\left(\dfrac{7}{2}\right)$.

Finalement, les solutions de l'équation (1) forment l'ensemble $\boxed{\left\{0,\, \ln\left(\frac{7}{2}\right)\right\}}$.

(2) Comme les deux membres de l'équation (2) sont strictement positifs, on peut les composer par le logarithme néprien, ce qui donne

$$5^x = 3^{x^2} \iff \ln(5^x) = \ln(3^{x^2}) \iff x\ln 5 = x^2 \ln 3 \iff x(x\ln 3 - \ln 5) = 0.$$

Les solutions de l'équation (2) sont $\boxed{\left\{0,\, \frac{\ln 5}{\ln 3}\right\}}$.

(3) Remarquons déjà que les deux membres de l'équation (3) n'ont un sens que pour $x > 0$. On utilise la même méthode que précédement. On a

$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x} \quad &\iff \quad \ln(x^{\sqrt{x}}) = \ln(\sqrt{x}^{\,x}) \iff \sqrt{x}\ln x = x\ln\sqrt{x} = x\ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{2}\ln x \\
&\iff \quad \ln x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Si $\ln x = 0$, ce implique $x = 1$ et $\sqrt{x} - \dfrac{x}{2} = 0$ est équivalent à $\sqrt{x} = 2$ (en divisant par $\sqrt{x} > 0$), soit $x = 4$.

Les solutions de l'équation (3) sont donc $\boxed{\{1,\, 4\}}$.