Déf : [Application Lipschitzienne]

Soient (E, N_E) et (F, N_F) deux evns.

Une application ~~linéaire~~ $f : A \subset E \to F$ est C-Lipschitzienne ($C>0$) sur A ~~lorsque~~ si $\forall x, x' \in A$ $\quad d_F(f(x), f(x')) \leq C\, d_E(x,x')$

- Lorsque $C \leq 1$, on dit que f est une contraction
- —— $C<1$ —— est contractante

b) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,\ell)=0$

notation : $x_n \to \ell$

$\iff \lim_{n\to+\infty} N(x_n-\ell)=0$

$\iff \forall \varepsilon>0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n\geq N_\varepsilon\ \ N(x_n-\ell)\leq\varepsilon$ (en norme) → $\nexists$ ~~un~~ $+\infty$ dans un evn

d) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb N}$ "part à l'infini" si $\lim_{n\to+\infty} N(x_n)=+\infty$

$\iff \forall A>0\ \exists N_A\in\mathbb N\ \forall n\geq N_A\ \ N(x_n)\geq A$

c) La suite est de Cauchy si

$\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon\in\mathbb N, \forall m,n\geq N_\varepsilon\ \ N(x_m-x_n)\leq\varepsilon$

$\iff$ les termes de la suite se rapproche autant que possible à l'infini. (pas "encore" de limite ; complet)

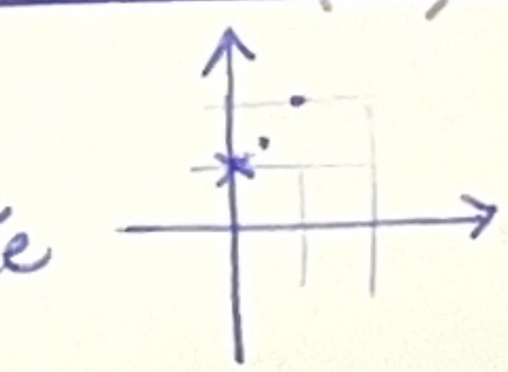
Proposition. Soit E ev, deux normes N et N' sont équivalentes ssi $Id : (E,N)\to(E,N')$ et $Id : (E,N')\to(E,N)$ sont Lipschitziennes

Démo : ↳ $\exists C>0$ tq $N(y-x)\leq C\, N'(y-x)$ $\forall y,x\in E$ $\qquad$ autre $\leq$

$\Downarrow$ $x=0$, $\forall y\in E$

$N(y)\leq C N'(y)$ $\square$

Ex. $x_n = \left(\frac{1}{n}; \frac{n+1}{n}\right)$ dans $\mathbb R^2$ $\quad \|\cdot\| = N_2$



a) $\|x_n\| = \sqrt{\left(\frac1n\right)^2 + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2} \leq \sqrt{1+4} = \sqrt5$: bornée

b) $x_n \to (0,1)$

c) non

d) oui → exercice (on classe si jamais vu "Cauchy")

Fin du Cours 1

Début Cours 2

III] Suites (similaire à ce qui se passe dans $\mathbb R$)

Déf. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb N}$ ($\mathbb N \to E$) une suite d'éléments de (E,N) evn

a) La suite $(x_n)_{n\in\mathbb N}$ est bornée s'il existe $M>0$ tq

$\forall n\in\mathbb N, \ N(x_n)\leq M$

Prop

0) Unicité de la limite lorsqu'elle existe $\begin{cases}x_n\to\ell\\x_n\to\ell'\end{cases}\Rightarrow \ell=\ell'$

b) $\begin{cases}x_n\to\ell\\y_n\to\ell'\end{cases} \Rightarrow x_n + \lambda y_n \to \ell+\lambda\ell'$, $\lambda\in\mathbb R$

a) $\big((x_n)_n$ converge$\big) \Rightarrow \big((x_n)_n$ de Cauchy$\big) \Rightarrow \big((x_n)_n$ bornée$\big)$ $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ ne tend pas vers l'∞

$\Leftarrow$ vrai si $\dim E<+\infty$; $\nLeftarrow$

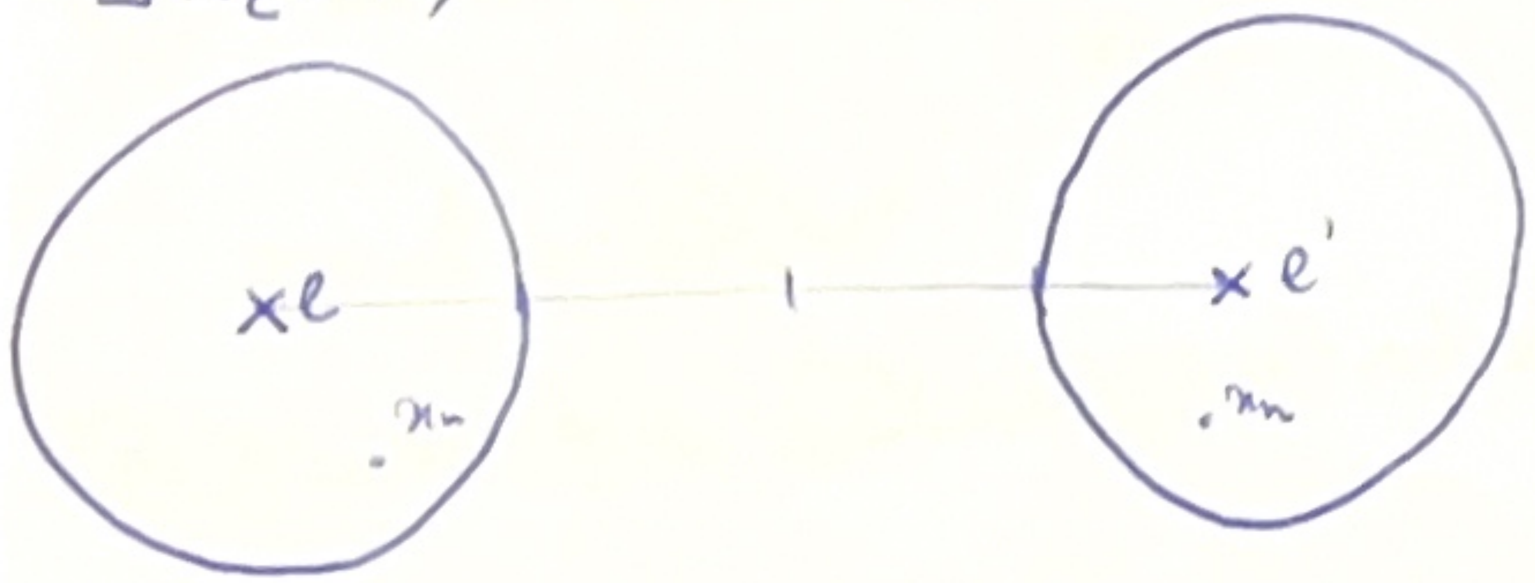
d) Lorsque $N\sim N'$: $(x_n)_n$ converge / bornée / de Cauchy / part à l'∞ dans (E,N) $\iff$ $(x_n)_n$ converge / bornée / de Cauchy / part à l'∞ dans (E,N')

Démo: a) Par l'absurde, supposons $\ell \neq \ell'$.

Soit $\varepsilon := \frac{d(\ell,\ell')}{4} > 0$. Par définition :

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \ d(x_n, \ell) \leq \varepsilon$

$\exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N'_\varepsilon, \ d(x_n, \ell') \leq \varepsilon$



Pour $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, on a

$4\varepsilon = d(\ell,\ell') \leq d(\ell, x_n) + d(\ell', x_n) \leq 2\varepsilon$

contradiction

b) $d(x_n + \lambda y_n ; \ell + \lambda \ell') = N(x_n + \lambda y_n - \ell - \lambda \ell')$

$\leq \underbrace{N(x_n - \ell)}_{\to 0} + |\lambda| \underbrace{N(y_n - \ell')}_{\to 0} \xrightarrow[n]{} 0$

(cv ⇒ Cauchy)

c). Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x_n \to \ell$

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \ d(x_n, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall m, n \geq N_\varepsilon$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \ell) + d(x_m, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$

.(Cauchy ⇒ bornée)

Pour $\varepsilon = 1$, on a $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in N_\varepsilon$ ~~d~~ $N(x_n - x_{N_\varepsilon}) \leq 1$

$N(x_n) - N(x_{N_\varepsilon}) \leq$

Donc $N(x_n) \leq 1 + N(x_{N_\varepsilon})$

Posons $M = \max(N(x_0), N(x_1), \dots, N(x_{N_\varepsilon - 1}), 1 + N(x_{N_\varepsilon}))$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $N(x_n) \leq M$.

d) Posons $N'(x) \leq C N(x)$

alors (⇒) Si $x_n \to \ell$ pour N alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ N(x_n - \ell) \leq \varepsilon$

donc $\uparrow \varepsilon := \varepsilon / C$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \ N'(x_n - \ell) \leq C N(x) \leq \varepsilon$.

idem pour les autres

et $N(x) \leq C N'(x)$ donne (⇐). □

Rq: ℓ non bornée ⇏ part à l'infini

Proposition: Dans $\mathbb{R}^d$, pour toute norme $\|\cdot\|_p$ avec $1 \leq p \leq \infty$, $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^d) \to \ell = (\ell^1, \dots, \ell^d)$ ssi $x_n^i \to \ell^i$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

Comme tous ces normes sont équivalentes : $\|\ \|_\infty$

Démo: (⇒) $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N_\varepsilon$

$\|x_n - \ell\|_\infty \leq \varepsilon$

$\max_i |x_n^i - \ell^i| \leq \varepsilon \ \forall i \Rightarrow x_n^i \to \ell^i$

(⇐) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon^i \in \mathbb{N}$ tq

$|x_n^i - \ell^i| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon^i$

⇒ en posant $N_\varepsilon := \max_{1 \leq i \leq d} N_\varepsilon^i$

$\forall n \geq N_\varepsilon$, $\underbrace{\max_{1 \leq i \leq d} |x_n^i - \ell^i|}_{\|x_n - \ell\|_\infty} \leq \varepsilon$ □

Proposition: Une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^d$ pour la norme $N = \|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ converge

Démo: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy

⇓

$\forall 1 \leq i \leq d$, $(x_n^i)_n$ de Cauchy dans $\mathbb{R}$

⇓

___ ___ converge

⇓ proposition

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge □

Déf: evn tq toute suite de Cauchy converge : Espace de Banach

Ex: toute evn de dim finie est Banach

(dans un espace métrique : Cauchy ⇒ cv : espace complet)

Exercice (à rédiger) 1

Soit $B(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des applications $f : X \to \mathbb{R}$ bornées,

i.e. $\exists M \geq 0$ tq $\forall x \in X$, $|f(x)| \leq M$.

① Montrer que $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ définit une norme

sur l'ev $B(X,\mathbb{R})$.

② Montrer que $(B(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Bonus : quelle est la dimension de $B(X,\mathbb{R})$?

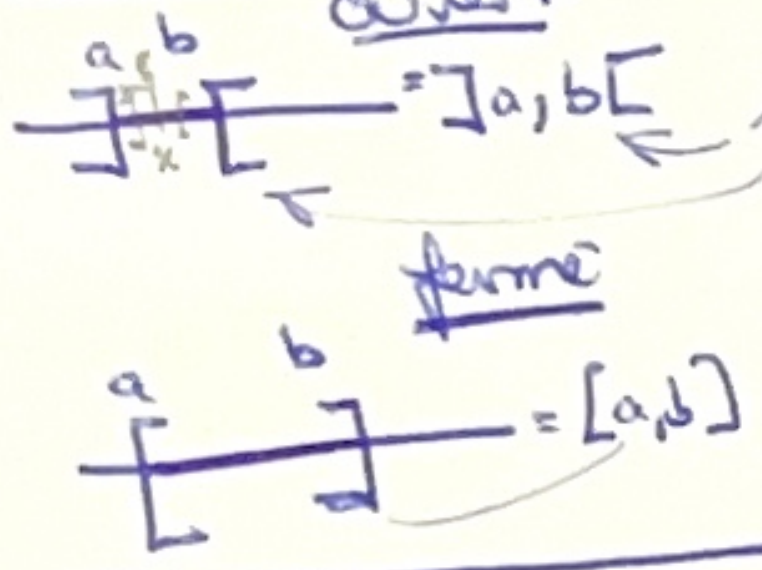
↳ voir corrigé rédigé en ligne

IV Topologie

norme $\Rightarrow$ distance $\Rightarrow$ Topologie
(d'1 vecteur) (de 2 vecteurs)

Étude du Lieu = Comparer les pts - propriétés des ensembles.

Paradigme : intervalles de $\mathbb{R}$:



<u>ouvert</u> $=]a,b[$ sans le bord $\Longleftrightarrow \forall x \in]a,b[, \exists \varepsilon > 0$ $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]a,b[$

<u>fermé</u> $= [a,b]$ avec le bord $\Longleftrightarrow \mathbb{R} \setminus [a,b]$ vérifie

Def. [Ouvert, Fermé] (E,N) evn

- Un sous-ensemble $O \subset E$ est dit <u>ouvert</u> si $\forall x \in O, \exists r > 0, B(x,r) \subset O$
- ——— $F \subset E$ ——— <u>fermé</u> si : $E \setminus F$ $(= \complement_E F = F^c)$ est ouvert

Ex : les intervalles de $\mathbb{R}$; E et $\emptyset$: les 2 à la fois

~~Ex~~ Proposition :

- Les boules ouvertes $B(x_0,r_0)$ sont des ouverts $\forall x_0 \in E, \forall r_0 \geq 0$
- ——— fermées $\overline{B}(x_0,r_0)$ ——— fermés

Démo :

- Soit $B(x_0,r_0) = \{x \in E \mid N(x-x_0) < r_0\}$

si $r_0 = 0$, condition vide : $B(x_0,r_0) = \emptyset \Rightarrow$ vraie

si $r_0 > 0$, soit $x \in B(x_0,r_0)$

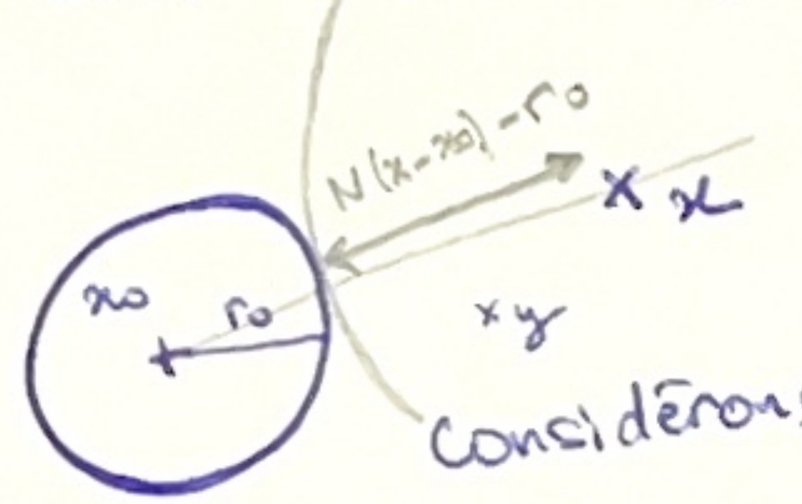
on prend $r := r_0 - N(x-x_0)$

alors tout $y \in B(x,r)$ vérifie

$N(y-x_0) \leq N(y-x) + N(x-x_0)$
$< r + N(x-x_0) = r_0$

donc $B(x,r) \subset B(x_0,r_0)$

- Soit $\overline{B}(x_0,r_0) = \{x \in E \mid N(x,x_0) \leq r\}$



Soit $x \in E \setminus \overline{B}(x_0,r_0)$
$\Longleftrightarrow N(x-x_0) > r_0$

considérons $r := N(x-x_0) - r_0$

alors, $\forall y \in B(x,r)$, on a :

$N(x-x_0) - N(y-x_0) \leq |N(x-x_0) - N(y-x_0)| \leq N(y-x) < r$

donc $\underbrace{N(x-x_0) - r}_{= r_0} < N(y-x_0)$ donc $B(x,r) \subset E \setminus \overline{B}(x_0,r_0)$ $\square$

Proposition : Les ouverts d'un evn vérifient

1) E et $\emptyset$ sont ouverts
2) Toute union (<u>quelconque</u>) d'ouverts est ouverte
3) Toute intersection <u>finie</u> d'ouverts est ouverte

Démo :

1) Trivial
2) Soit $\{O_i\}_{i \in I}$ quelconque

et soit $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$.

$\exists i_0 \in I$ tq $x \in O_{i_0}$

Comme O_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tq

$B(x,r) \subset O_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} O_i$

3) Soit $\{O_i\}_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie d'ouverts et soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$.

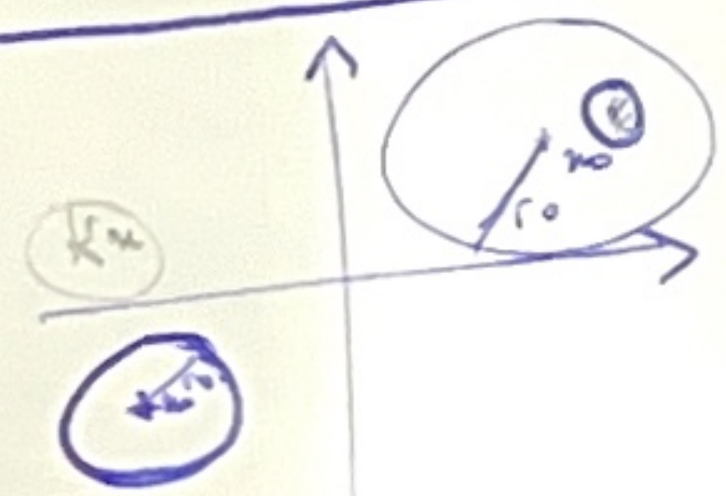
Comme chaque O_i est ouvert, il existe $r_i > 0$ tq $B(x,r_i) \subset O_i$. Considérons $r := \min_{1 \leq i \leq n} r_i$

Alors $\forall 1 \leq i \leq n$ $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset O_i$ donc $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ $\square$

Ex : Tout singleton $\{x_0\} = \overline{B}(x_0,0)$ est fermé dans un evn.

Exercices 13 – 14 (ouvert - fermé)

Dessin :



2 Dernière propriété fausse en général si I n'est pas fini :

<u>Contre-exemple</u> : $\bigcap_{i\in\mathbb{R}^{+*}} \underbrace{B(0,i)}_{\text{ouverts}} = \{0\}$ ← mais pas ouvert

<u>Proposition</u> : Les fermés d'un evn vérifient

1) $\emptyset$ et E sont fermés
2) Une intersection (<u>quelconque</u>) de fermés est fermée
3) Une union <u>finie</u> de fermés est fermée

<u>Démo</u> : passage au complémentaire de la proposition précédente.

ex : 2) $E-(\bigcap_{i\in I} \underset{\text{fermé}}{F_i}) = \bigcup_{i\in I}(\underbrace{\mathbb{R}-F_i}_{\text{ouvert}})$ ouvert $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i$ fermée □

<u>Rq</u> : Proposition ⊛ ⟶ Définition axiomatique d'une "topologie" lorsqu'on n'a ni norme, ni distance (par exemple si pas evn)

↓ Avantage d'avoir une topologie donnée par une norme = caractérisations <u>à l'aide des suites</u>.

<u>Proposition</u> Dans un evn (E,N) un ensemble F est fermé ssi pour toute suite convergente (x_n) ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~) de F (x_n) sa limite x est encore dans F

Ex 15-16.

<u>Démo</u> : (pas d'idée générale à avoir : semi-automatique)

($\Longrightarrow$) Par l'absurde, supposons qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F convergeant vers $x\notin F$.

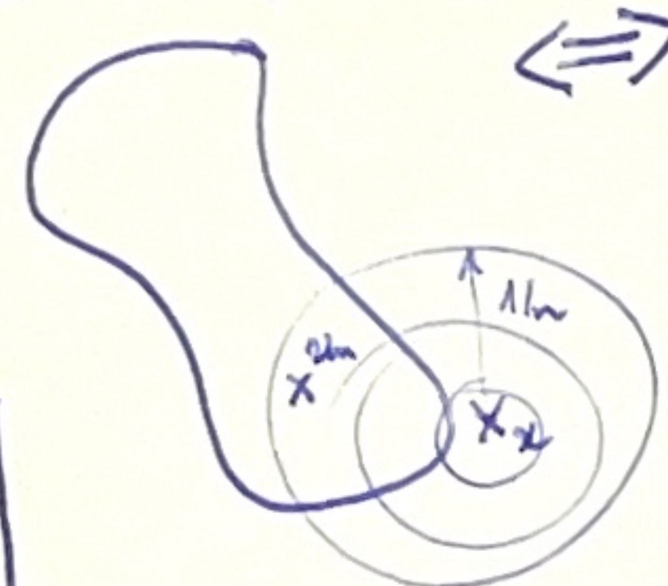
Comme $x \in \underbrace{E\setminus F}_{\text{ouvert}}$, il existe $r>0$ tel que $B(x,r)\subset E\setminus F$.

La convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appliquée à "$\varepsilon=r$" donne $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N$

$N(x_n-x)<r$ c'est-à-dire $x_n\in B(x,r)$ contredit $x_n\in F$

($\Longleftarrow$) Par l'absurde, supposons que F ne soit pas fermé $\Longleftrightarrow E\setminus F$ pas ouvert $\Longleftrightarrow \exists x\in E\setminus F, \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\underbrace{B(x,\tfrac{1}{n})\cap F}_{x_n\in} \neq \emptyset$



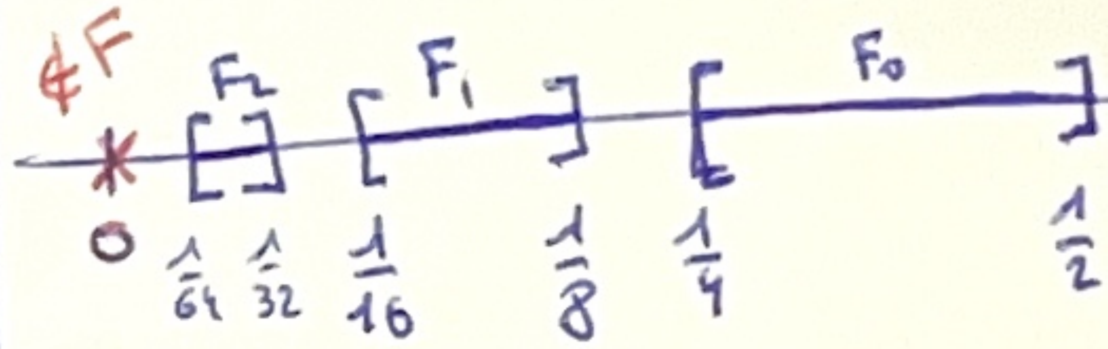
Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F. Montrons que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et cela contredira :

Soit $\varepsilon>0$, posons $N:=[\frac{1}{\varepsilon}]+1 \in\mathbb{N}$, alors $N>\frac{1}{\varepsilon}$ et $\forall n\geq N$, on a

$N(x_n-x)\leq \frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}<\varepsilon$ □

<u>Application</u> : $\forall n\in\mathbb{N}$

$F_n := \left[\frac{1}{2^{2n+2}} ; \frac{1}{2^{2n+1}}\right]$



Est-ce que $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est fermé ?

Soit $x_n := \frac{1}{2^{2n+1}} \in F$

$x_n \longrightarrow 0 \notin F \Rightarrow$ NON

si A "pas" ouvert ou fermé ? meilleure approximation

<u>Def</u> [Adhérence, Intérieur, Frontière]

Soit $A\subset E$, (E,N) evn

• <u>L'intérieur</u> de A est

$$\boxed{\mathring{A} := \bigcup_{\substack{O\subset A \\ O \text{ ouvert}}} O}$$

• <u>L'adhérence</u> de A est

$$\boxed{\bar{A} := \bigcap_{\substack{F\supset A \\ F \text{ fermé}}} F}$$

• La <u>frontière</u> de A est

$$\partial A = \operatorname{Fr} A := \bar{A}\setminus\mathring{A}$$

Fin du Cours 2