Corollaire : Soit $f : (E, N_E) \to (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_d(x))$$

f continue en x_0 si et seulement si $f_i : (E, N_E) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continue en x_0 $\forall 1 \leq i \leq d$.

Démo : Comme la continuité ne dépend pas de la norme équivalente, on considère $\|\cdot\|_\infty$. ~~La proposition~~ Le théorème précédent montre

($\Leftarrow$)

f continue en $x_0 \iff (\forall x_n \to x_0,\ f(x_n) \to f(x_0)) \iff (\forall x_n \to x_0,\ f_i(x_n) \to f_i(x_0)\ \forall 1 \leq i \leq d)$

proposition sur la convergence des suites de $\mathbb{R}^d$

2 pas direct $\not\Leftarrow$ car les suites doivent pouvoir être différentes pour tout i.

$\iff (f_i$ continue en x_0, $\forall 1 \leq i \leq d)$

($\Rightarrow$) Soit $1 \leq i \leq d$ et soit $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x_0$. Comme f est continue : $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

$\Downarrow$

$f_i(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_i(x_0)$ $\forall 1 \leq i \leq d$

$\Rightarrow f_i(x_n) \to f_i(x_0)$

ce qui montre que f_i est continue. $\square$

Exemple : $f : (E, N) \to \mathbb{C}$ continue si et seulement si $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Re} f$ continues

Fin Cours 3

Début Cours 4

$\to$ Cas des applications linéaires :

$x_n \to x_0 \iff x_n - x_0 \to 0$; $f(x_n) \to f(x_0) \iff f(x_n - x_0) \to 0$

$\Rightarrow$ (f linéaire, continue sur $E \iff$ continue en 0)

Proposition : f linéaire $(E, N_E) \to (F, N_F)$ continue ssi Lipschitzienne

ssi $\exists C > 0\ \forall x \in E$ $N_F(f(x)) \leq C N_E(x)$

Démo :

($\Uparrow$) $\exists C > 0\ \forall x, y \in E$ $N_F(f(x) - f(y)) = N_F(f(x-y)) \leq C N_E(x-y)$

($\Leftarrow$) déjà vu

($\Downarrow$) f est continue donc continue en 0.

Pour $\varepsilon = 1$, on a : $\exists \alpha > 0$: $\forall x \in E$ $N_E(x) < \alpha \Rightarrow N_F(f(x)) < 1$

On prétend que $C := \frac{1}{\alpha}$ convient :

si $x = 0$, alors $N_F(f(0)) = 0 \leq C N_E(0) = 0$

si $x \neq 0$, alors posons $y := \frac{\alpha}{2 N_E(x)} x$. D'où

$$N_E(y) = \frac{\alpha}{2 N_E(x)} N_E(x) < \alpha \Rightarrow$$

$$N_F(f(y)) = N_F\left(f\left(\frac{\alpha}{2N_E(x)} x\right)\right) = \frac{\alpha}{2 N_E(x)} N_F(f(x)) < 1$$

$$\iff N_F(f(x)) < \frac{2}{\alpha} N_E(x) \leq \underbrace{\frac{1}{\alpha}}_{C} N_E(x) \quad \square$$

Thm : Soit E ev dim finie $\dim E = d$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E $= \{e_1, \dots, e_d\}$

Toute application linéaire $f : (E, N_p^{\mathcal{B}}) \to (F, N_F)$ est continue

Rappel : $N_p^{\mathcal{B}}(x_1 e_1 + \dots + x_d e_d) = \|(x_1, \dots, x_d)\|_p$.

Démo : Comme les normes N_p^B sont équivalentes,

on considère (comme toujours) $N_\infty^B(x) = \max_{1\le i\le d} |x_i|$

Par linéarité de f, on a : $\forall x\in E$,

$$N_F(f(x_1e_1+\dots+x_de_d)) \le |x_1|\, N_F(f(e_1)) + \dots + |x_d|\, N_F(f(e_d))$$
$$\le \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{d} N_F(f(e_i))\right)}_{=C} \times N_\infty^B(x)$$

et on conclut par le théorème précédent. □

→ Opérations sur les applications continues

Proposition : Soient $f,g : (E,N) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continues en x_0

1) Le produit $fg : E \to \mathbb{R}$ est continue en x_0

2) Si $g(x_0)\neq 0$, le quotient $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Démo : Soit $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ dans E, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$

et $g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x_0)$

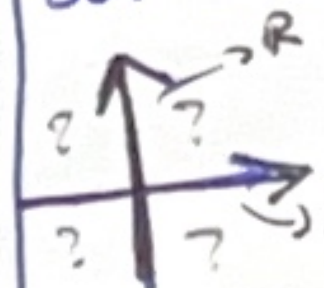
et par continuité du produit et du quotient dans $\mathbb{R}$:
$(fg)(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (fg)(x_0)$ et $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$ □

Démo : Exercice !

⚠ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f_1(x), f_2(x))$ continue ssi f_1 et f_2 continues.

mais

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'est pas toujours continue si $f(\cdot,0) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $f(a,\cdot) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont continues



Contre exemple : $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$f(0,0) = 0$

$x_n = y_n = \frac{1}{n} \to (0,0)$

mais $f(x_n,y_n) = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$

Rq : f linéaire + $\dim E < +\infty \Rightarrow$ continue
$E \to F$

⚠ faux en $\dim E = \infty$

Proposition

Soit $f : (E,N) \to (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)$ pour $1\le p\le +\infty$ continue en x_0

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_d]$

L'application $P(f) : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto P(f_1(x),\dots,f_d(x))$ est continue en x_0

Démo : Si $x_n \to x_0$, alors $f_i(x_n) \to f_i(x_0)$ $\forall 1\le i\le d$

et par continuité des fonctions polynomiales (combinaison linéaire de monômes)

$P(f_1(x_n),\dots,f_d(x_n)) \to P(f_1(x_0),\dots,f_d(x_0))$ □

Cor : Les applications déterminant $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

et trace $Tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

produit $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $(A,B) \mapsto AB$

sont continues.

Exercice à rédiger 3

Sur l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$, on considère

$$\|P\| := \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right|$$

1) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme

2) Est-ce que l'application $u_k : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto P^{(k)}(0)$, pour $k\in\mathbb{N}$

est continue ?

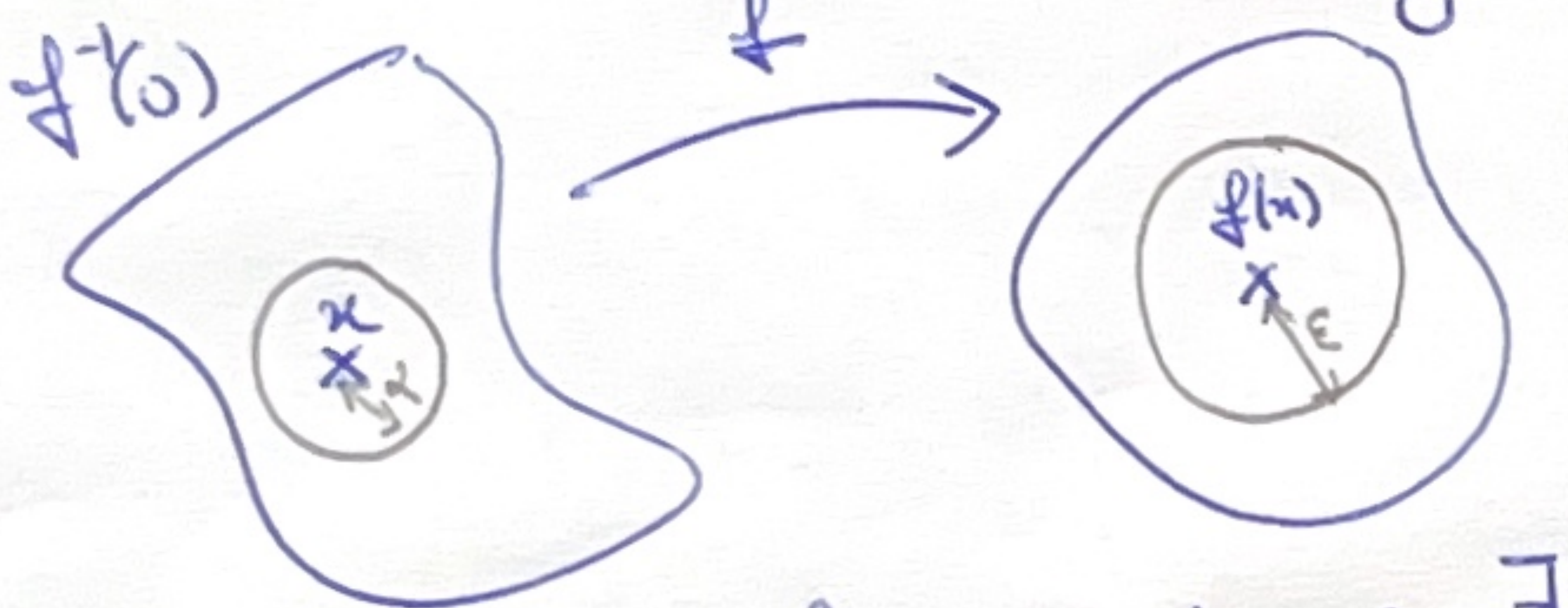
3) $d : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$?

→ Continuité et topologie

Proposition : Une application $f : (E, N_E) \to (F, N_F)$ entre evns est continue si et seulement si $\forall O \subset F$ ouvert, $f^{-1}(O)$ ouvert de E

ssi $\forall G \subset F$ fermé, $f^{-1}(G)$ fermé de E

Démonstration : ($\Rightarrow$) Soit $O \subset F$ ouvert et soit $x \in f^{-1}(O)$



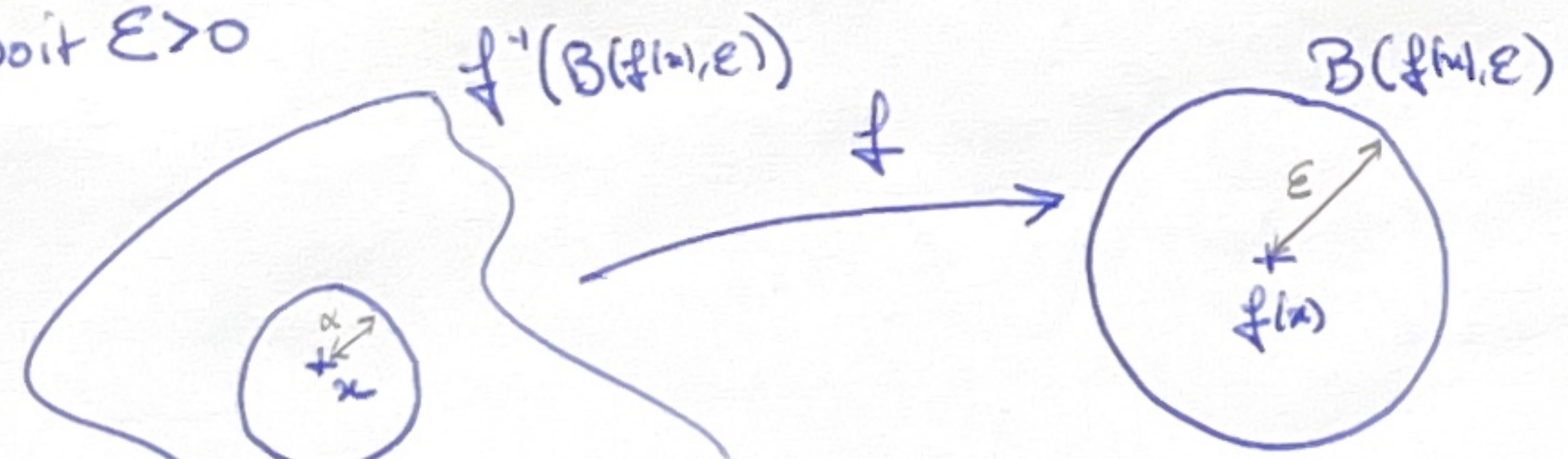
Comme O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$, tq $B(f(x), \varepsilon) \subset O$.

La continuité de f en x donne $\exists \alpha > 0$,

$N_E(y-x) < \alpha \Rightarrow N_F(f(y) - f(x)) < \varepsilon$, c'est-à-dire $B(x, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(O)$. Donc $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

($\Leftarrow$) Soit $x_n \to x$ dans E, montrons que $f(x_n) \to f(x)$ dans F.

Soit $\varepsilon > 0$



Comme $B(f(x), \varepsilon)$ est ouvert de F, $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ est un ouvert de E, donc $\exists \alpha > 0$, $B(x, \alpha) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$.

Ceci implique, par convergence de la suite $(x_n)_n$:

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad N_E(x_n - x) < \alpha \Rightarrow N_F(f(x_n) - f(x)) < \varepsilon$. $\square$

Pour les fermés : $f^{-1}(F \setminus G) = E \setminus f^{-1}(G)$

Corollaire : $GL_n(\mathbb{R}) = \{M \text{ inversible de } M_n(\mathbb{R})\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ouvert de $M_n(\mathbb{R})$

Proposition : L'image d'un compact par une application continue entre evns est un compact

Démo : Soit $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $f(K)$ pour $K \subset E$ compact.

Alors $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $K \Rightarrow \exists$ sous-suite $x_{\varphi(n)} \to x$ dans K

Par continuité de f, on a $f(x_{\varphi(n)}) \to f(x)$ $\square$

Corollaire : $f : (E, N_E) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ continue et $K \subset E$ compact alors $f(K)$ borné, i.e. $\exists M > 0, \forall x \in K, |f(x)| \leq M$ et atteint ses bornes : $\exists x_m$ et $x_M \in E$, tq $f(x_m) = \inf_{x \in K} |f(x)|$

$f(x_M) = \sup_{x \in K} |f(x)|$

Démo : $f(K)$ compact de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire fermé borné. $\square$

$\boxed{\text{Thm}}$ Dans un evn (E, N) de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration: Comme ~ est une relation d'équivalence, il suffit de montrer que toute norme $\tilde{N}$ et E est équivalente à N_∞^B où B est une base de E. La base B induit un isomorphisme avec $\mathbb{R}^d$.

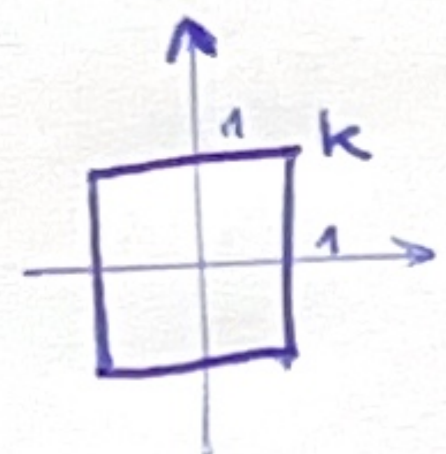
On montre donc que toute norme N de $\mathbb{R}^d$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$Id : \underbrace{(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)} \to (\mathbb{R}^d, N)$ est continue $\Longrightarrow$ Lipschitzienne

dim finie et norme ∞
linéaire

c'est-à-dire $\exists C>0,\ N(x) \leq C\|x\|_\infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^d$.

$\Longrightarrow \underbrace{(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)}_{\text{Z pas N}} \xrightarrow{N} (\mathbb{R}, |\cdot|)$ Lipschitzienne $\Rightarrow$ Continue



On considère $K := \{x \in \mathbb{R}^d,\ \|x\|_\infty = 1\}$

fermé borné dans $(\underbrace{\mathbb{R}^d}_{\text{dim finie}}, \|\cdot\|_\infty) \Rightarrow$ compact

Donc $\exists x_m, x_M \in K$ tq $\forall x \in K,\ \underbrace{N(x_m)}_{A:=} \leq N(x) \leq \underbrace{N(x_M)}_{B:=}$

D'où, $\forall x \in \mathbb{R}^d$,
$$A\|x\|_\infty \leq N(x) = \|x\|_\infty N\left(\frac{1}{\|x\|_\infty}x\right) \leq B\|x\|_\infty.$$

Il reste à montrer que $0 < A \leq B$. Par l'absurde, si $A = 0$ alors $N(x_m) = 0 \Longrightarrow x_m = 0$: contredit $\|x_m\|_\infty = 1$ et $x_m \neq 0$ □

Corollaire: (E, N) evn dim finie

1. Complet (Banach)
2. compact $\Longleftrightarrow$ fermé borné
3. Toute application linéaire $f : E \to \underbrace{(F, N_F)}_{\text{quelconque}}$ continue

Démo: notions indépendantes de la notion équivalente choisie. On a montré ①, ② et ③ pour $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ donc vrai pour tout norme par le théorème précédent. □