② La réciproque est fausse : l'existence de dérivées dans toutes les directions $\not\Longrightarrow$ f différentiable
(d'où la définition "globale" de différentiable choisie ici)

Exercice 3 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) := \begin{cases} y^2/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions
2) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$
(elle n'est même pas continue!)

↓ Bonne réciproque

Thm Soit $f : \underset{\text{ouvert}}{U} \subset E \to F$ et $\dim E$ finie

$\forall \vec{v} \in E$, la dérivée de f dans la direction $\vec{v}$: $U \to F$, $x \mapsto \frac{d f(x+t\vec{v})}{dt}(0)$

est continue

$\Updownarrow$

f de classe $\mathcal{C}^1$ ($\Leftrightarrow f$ dérivable et $D_\cdot f$ continue)

Démo : plus tard application : "impossible" car il faudrait calculer une infinité de dérivée, une par chaque $\vec{v} \in E$ ....

Fin Cours 5

$\dim E < +\infty \Longrightarrow$ On se ramène à $E = \mathbb{R}^m$ par choix de base.

→ 2) Dérivées partielles

dans ce cas ($E = \mathbb{R}^m$) dérivées canoniques

Déf [Dérivées partielles] $f : \underset{\text{ouvert}}{U} \subset \mathbb{R}^m \to F$ lorsqu'elles existent, les dérivées dans les directions des vecteurs de la base canonique sont appelées dérivées partielles et notées $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \frac{d f(a+te_i)}{dt}(0)$

Exercice 4 : calculer $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial f}{\partial \beta}$

Rq : • $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{d f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i+t, a_{i+1}, \dots, a_m)}{dt}(0)$

• f différentiable $\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_a f(e_i)$ et "réciproquement" (donc)

⊛ $\boxed{D_a f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, dx_i}$, où $dx_i = e_i^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_m) \longmapsto x_i$

base duale (= projection canonique)

Exercices 18, 20

Thm Soit $f : \underset{\text{ouvert}}{U} \subset \mathbb{R}^m \to F$

L'application f admet des dérivées partielles continues sur U

$\Updownarrow$

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$. Dans ce cas, on a ⊛

Démo : ($\Uparrow$) déjà vu : $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_a f(e_i)$: continue en a pour tout $1 \leq i \leq m$.

($\Downarrow$) [à lire chez soi, pas en cours] On montre d'abord que f est différentiable, i.e. $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i + \|h\|_E\, \underset{h \to 0}{\varepsilon(h)}$

On considère ici $N_1(x) = \|x\|_E = \sum_{i=1}^m |x_i|$ (par équivalence des normes en dimension finie).

Soit $\varepsilon>0$, on cherche $\alpha>0$ tel que $\|h\|_E<\alpha$

implique $\dfrac{1}{\|h\|_E}\left\| f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{m}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i\right\|_F<\varepsilon$

(pour $h\neq 0$)

Comme les dérivées partielles de f sont continues en a et qu'il n'y en a qu'un nombre fini, alors

$$\exists K>0,\ \forall a+h\in U,\ \|h\|_E<\alpha \Rightarrow \underbrace{\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+h)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right\|_F<\varepsilon}_{(*)}$$

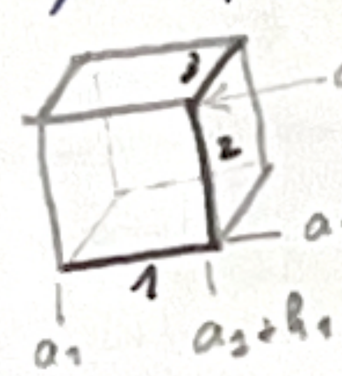
prendre $\min\limits_{1\leq i\leq m}\alpha_i$

ouvert $\Rightarrow B(a,r)\subset U$
on peut au besoin réduire α en considérant $\min(\alpha,r)$.

On va utiliser $(*)$ et le théorème des accroissements finis pour majorer l'écart de $\boxed{g(a+k):=f(a+k)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).k_i}$ entre

$y_i := (a_1+h_1,\dots,a_{i-1}+h_{i-1},a_i+h_i,a_{i+1},\dots,a_m)$ et $(a_1+h_1,\dots,a_{i-1}+h_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_m)=:y_{i-1}$

$[y_0:=(a_1,\dots,a_m)=a$ et $y_m=a+h]$.



On pose : $g_i : [a_i, a_i+h_i] \longrightarrow F$

$t \longmapsto g(a_1+h_1,\dots,a_{i-1}+h_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_m)$

$[a_i+h_i, a_i]$ si $h_i<0$

alors $g_i'(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1+h_1,\dots,a_{i-1}+h_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_m)-\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

La généralisation (directe) du théorème des accroissements finis aux espaces vectoriels normés [admis] donne alors

$\|g_i'(t)\|_F<\varepsilon \Rightarrow \|g_i(a_i+h_i)-g_i(a_i)\|_F<\varepsilon|h_i|$

Au final, on obtient

$$\left\|f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i\right\|_F=\|g(a+h)-g(a)\|_F$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{m}g(y_i)-g(y_{i-1})\right\|_F\leq\sum_{i=1}^{m}\|\underbrace{g(y_i)}_{g_i(a_i+h_i)}-\underbrace{g(y_{i-1})}_{g_i(a_i)}\|_F$$

$$\leq\varepsilon\sum_{i=1}^{m}|h_i|=\varepsilon\|h\|_E$$

↳ f est donc différentiable et sa différentielle vaut :

$$U\longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$$
$$a\longmapsto D_af=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,dx_i$$

somme finie d'applications continue $\Rightarrow$ continue $\square$

Cas $F=\mathbb{R}^n$ (i.e. F de dimension finie)

↳ $f : U\subset \underset{\mathbb{R}^m}{E}\longrightarrow \underset{\mathbb{R}^n}{F}$

$x=(x_1,\dots,x_m)\longmapsto (f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m))$

dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a),\dots,\frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\right).$$

Sous cette forme, la différentielle s'écrit :

$$D_a f(h_1e_1+h_2e_2+\dots+h_me_m) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) f_i$$

base canonique de $\mathbb{R}^m = E$

base canonique de $\mathbb{R}^n = F$

application linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \Rightarrow D_af(H) = M \times H$, $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$

Déf. La matrice jacobienne est la matrice de l'application linéaire D_af dans les bases canoniques : $\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m$

$$J_af := \underset{(\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_m)}{\mathrm{Mat}}(D_af) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow D_af(H) = J_af \times H$ où $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$

Exercice 24

- Le jacobien de f en a $:= \det(J_af)$

Ex : $f(\alpha,\beta) = {}^t(\cos\alpha(2+\cos\beta), \sin\alpha(2+\cos\beta), \sin\beta)$

$$J_{(\alpha,\beta)}f = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(2+\cos\beta) & -\cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha(2+\cos\beta) & -\sin\alpha\sin\beta \\ 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Proposition : $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ différentiable en a
$g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ——— en $f(a)$

$$J_a(g\circ f) = \underbrace{J_{f(a)}g}_{\in \mathcal{M}_{n,m}} \times \underbrace{J_af}_{\in \mathcal{M}_{m,k}}$$

$\in \mathcal{M}_{n,k}$; produit matriciel.

Exercice 25

Démo : $J_a(g\circ f) = \underset{(\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_k)}{\mathrm{Mat}} D_a(g\circ f) = \underset{(\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_k)}{\mathrm{Mat}}(D_{f(a)}g \circ D_af)$

$= \underset{(\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_m)}{\mathrm{Mat}} D_{f(a)}g \times \underset{(\mathcal{E}_m,\mathcal{E}_k)}{\mathrm{Mat}} D_af = J_{f(a)}g \times J_af$ □

Cor. $\hookrightarrow$ $\displaystyle \frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(a)) \times \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(a)$

$$= \frac{\partial g_i(f_1(x_1,\dots,x_k),\dots,f_m(x_1,\dots,x_k))}{\partial x_j}(a)$$

Exercice à rédiger :

① Montrer que $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ← coordonnées polaires

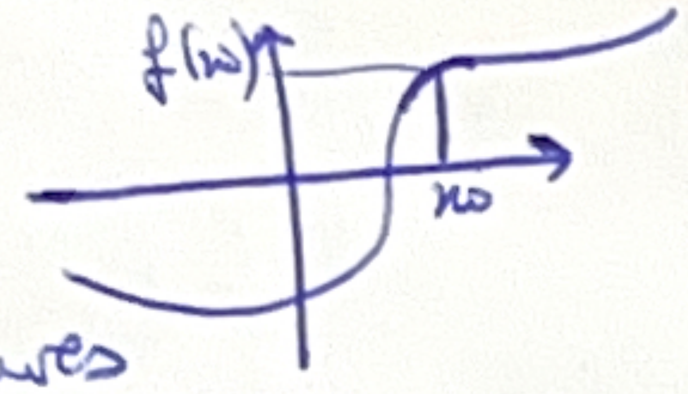
② Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{D}^1$ (différentiable). Calculer la matrice jacobienne de $f\circ\Phi$.

à lire plus tard

③ Calculer le laplacien $\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en coordonnées polaires c'est-à-dire calculer $\Delta f\circ\Phi$ en fonction des dérivées partielles (d'ordre ≤ 2) de $f\circ\Phi$.

3) Dérivées partielles supérieures

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



les dérivées supérieures lorsqu'elles existent servent à mieux approximer la fonction f en un point:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

Cas des applications: $f : U \subset E \to F$?

$D(D_-f)$ .... différentielle de la différentielle : existe mais compliquée... à la place

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^m \to F$

Def: • Dérivée partielle d'ordre 2 (lorsqu'elle existe):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) := \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}}_{U\subset\mathbb{R}^m \to F}\Big)(a)$$

$U\subset\mathbb{R}^m \to F$: on peut considérer ses dérivées partielles.

• Dérivée partielle d'ordre p (lorsqu'elle existe)

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_p}}(a) := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_p}}\right)(a)$$

• L'application $f : U \subset \mathbb{R}^m \to F$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur U si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent sur U et qu'elles y sont continues

Ex: $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}(\alpha,\beta) = (\sin\alpha\sin\beta, -\cos\alpha\sin\beta, 0)$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial\beta\partial\alpha}(\alpha,\beta) = (\qquad\qquad)$ ah!

Thm [Schwarz] Toute application $f : U \subset \mathbb{R}^m \to F$ qui admet des dérivées partielles d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sur U et continue en a pour une paire $1 \le i, j \le m$, vérifie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Rq: • L'ordre dans lequel on calcule les dérivées d'ordre p ne compte pas lorsque l'application est de classe $\mathcal{C}^p$.

• 2 L'hypothèse que les dérivées d'ordre 2 sont continues sont nécessaires: → Contre-exemple dû à Peano [1884] (Ex 20)

Exercice: Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent mais sont différentes

• $f \in \mathcal{C}^p$ si D_-f est $\mathcal{C}^{p-1}$

Def: f de classe $\mathcal{D}^p$, $p \geq 1$, si D_-f est de classe $\mathcal{D}^{p-1}$.

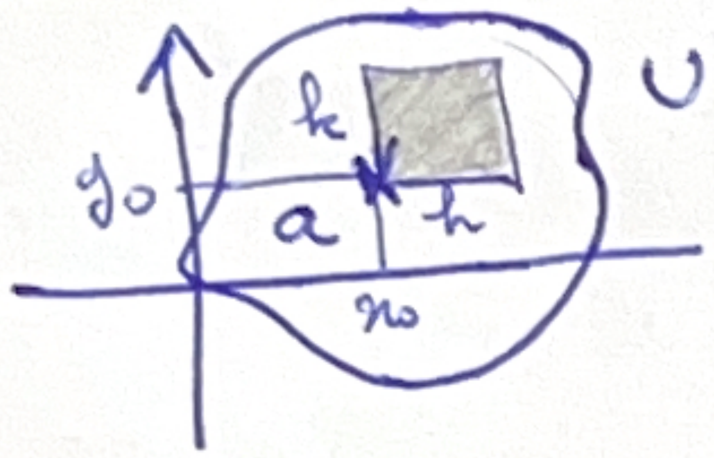
↳ $\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{D}^2 \supset \mathcal{C}^2 \supset \mathcal{D}^3 \supset \mathcal{C}^3 \dots$

Exercice:

3 Calculer le laplacien en coordonnées polaires.

Démo: [Thm de Schwarz]

Il suffit de le démontrer pour $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$



posons $a=(x_0,y_0)$

$a\in U$ ouvert $\Rightarrow \exists\, h,k>0$ tels que $[x_0,x_0+h]\times[y_0,y_0+k]\subset U$

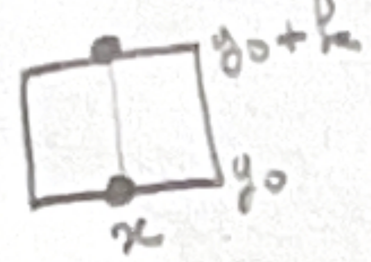
On considère l'application

$$\delta(h,k) := f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0)$$

On pose $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto \varphi(x)=f(x,y_0+k)-f(x,y_0)$$

d'où



$\delta(h,k)=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$.

L'application φ est dérivable sur $[x_0,x_0+h]$, donc, par le théorème des accroissements finis $\exists\,\theta_x\in]0,1[$ tel que

$$\delta(h,k)=h\varphi'(x_0+\theta_x h)=h\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_x h,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_x h,y_0)\right].$$

De la même manière, on considère l'application

$y\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_x h,y)$ qui est dérivable sur $[y_0,y_0+k]$

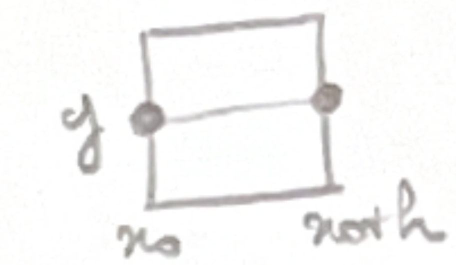
Par le théorème des accroissements finis, $\exists\,\theta_y\in]0,1[$ tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_x h,y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_x h,y_0)=k\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_x h,y_0+\theta_y k)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta(h,k)=hk\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_x h,y_0+\theta_y k)}$$

En commençant dans l'autre sens, i.e par

$\psi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y)$ et $\delta(h,k)=\psi(y_0+k)-\psi(y_0)$,



il existe $\theta'_x,\theta'_y\in]0,1[$ tels que

$$\boxed{\delta(h,k)=hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta'_x h,y_0+\theta'_y k)}$$

D'où, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0+\theta_x h,y_0+\theta_y k)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta'_x h,y_0+\theta'_y k)$

La continuité des dérivées partielles d'ordre 2 on a

et le fait que $\theta_x h,\ \theta_y k,\ \theta'_x h,\ \theta'_y k \xrightarrow[h,k\to 0]{} 0$

car $\theta_x,\theta_y,\theta'_x,\theta'_y\in]0,1[$

donne $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)$ $\square$

fin Cours 6