

**FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 1**

**GROUPES ABÉLIENS QUOTIENTS, GROUPES CYCLIQUES**

**Exercice 1** (Groupe quotient).

Soit  $(A, +, 0)$  un groupe abélien (commutatif) et soit  $H \subset A$  un sous-groupe de  $A$ .

Pour tout  $a \in A$ , la *classe de  $a$  modulo  $H$*  est définie par le sous-ensemble de  $A$  suivant

$$a + H := \{a + h, h \in H\} \subset A.$$

- (1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux classes soient égales,  $a + H = b + H$ .

On note  $A/H$  l'ensemble des classes modulo  $H$ .

$$A/H := \{a + H, a \in A\}.$$

- (2) Montrer que l'ensemble des classes modulo  $H$  forme une partition de  $A$ . Si, en outre,  $A$  est fini, montrer que toutes les classes ont le même cardinal. Combien y a-t-il de classes différentes dans ce cas?

On définit la loi de composition interne suivante entre deux classes :

$$(a + H) \bar{+} (b + H) := (a + b) + H = \{a + b + h, h \in H\}.$$

- (3) Montrer que  $(A/H, \bar{+}, 0 + H)$  est un groupe abélien. Ce groupe est appelé le *groupe quotient de  $A$  par  $H$* .

**Exercice 2** (L'exemple  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ).

- (1) Soit  $n \in \mathbb{Z}$ , montrer que  $n\mathbb{Z} := \{n.k, k \in \mathbb{Z}\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}, +, 0)$ .  
(2) Montrer que tous les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont de cette forme.

Comme dans l'exercice précédent, on note  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \bar{+}, 0 + n\mathbb{Z})$  le groupe abélien des classes modulo  $n$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on notera  $\bar{k}$  la classe  $k + n\mathbb{Z}$  de  $k$  modulo  $n$ .

- (3) Que vaut  $\overline{137} \bar{+} \overline{212}$  dans  $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ ?  
(4) "Arithmétique horlogère" [Gauss]

Je dois partir demain pour San Fransisco à 9 heures. Le train mettra 126 heures pour relier Nice à Vladivostok. Il faudra ensuite 358 heures au bateau pour franchir le Golden Gate Bridge. En arrivant vais-je pouvoir manger mes pancakes favoris dans un café du port dont les horaires d'ouverture sont 7 heures - 11 heures?

**Exercice 3** (Morphismes).

Soit  $\pi : A \rightarrow A/H$  la projection ensembliste canonique de  $A$  vers la partition définie par les classes modulo  $H$ .

- (1) Montrer qu'avec la structure de groupe sur  $A/H$  définie à l'exercice 1,  $\pi$  est un homomorphisme de groupes. Montrer que la structure de groupe définie sur  $A/H$  est l'unique structure faisant de  $\pi$  un homomorphisme de groupes.
- (2) Soit  $f : A \rightarrow B$  une application ensembliste. Montrer qu'il existe une application  $\bar{f} : A/H \rightarrow B$  telle que  $f = \bar{f} \circ \pi$  si et seulement si  $f$  est constante sur chaque classe.

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\
 & A/H &
 \end{array}$$

Dans ce cas, on dit que  $f$  se factorise par  $\pi$ .

- (3) Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de groupes abéliens. Montrer que  $f$  se factorise par  $\pi$  si et seulement si  $H \subset \text{Ker } f$  et que dans ce cas,  $\bar{f}$  est un morphisme de groupes.
- (4) Soit  $f : A \rightarrow B$  un morphisme de groupes abéliens. Montrer que  $\bar{f} : A/\text{Ker } f \rightarrow B$  est un monomorphisme. Montrer que  $\tilde{f} : A/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } B$  est un isomorphisme.

**Exercice 4** (L'exemple  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ).

Montrer que  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  est isomorphe au groupe abélien multiplicatif des complexes de modules 1. (Utiliser l'exponentielle complexe).

**Exercice 5** (Théorème des restes chinois).

Soient deux nombres entiers  $p$  et  $q$  premiers entre eux.

- (1) Montrer que  $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$  est isomorphe au produit  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ .
- (2) Un général chinois est parti pour une bataille avec 386 soldats. A la fin du combat, il souhaite compter ses troupes. Il leur ordonne de se mettre en rang de  $p$  soldats et il note le nombre de soldats formant la dernière rangée incomplète. Puis il procède de même mais en les faisant se mettre en rang de  $q$  soldats. Quelles valeurs de  $p$  et  $q$  doit-il prendre? Expliquer comment il s'y prend finalement pour compter précisément ses soldats.
- (3) Que peut-on dire si  $p$  n'est pas premier avec  $q$ ?  
(On pourra considérer  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .)

**Exercice 6** (Espaces vectoriels quotients).

Soit  $V$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathbb{K}$  et soit  $W$  un sous-espace de  $V$ . Donc  $W$  est en particulier un sous-groupe abélien de  $(V, +, 0)$ .

- (1) Montrer que  $V/W$  a une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  telle que la projection  $\pi : V \rightarrow V/W$  soit une application linéaire.
- (2) Pour  $V = \mathbb{R}^2$  et  $W = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ , à quoi correspondent graphiquement les éléments de  $V/W$  dans le plan affine.
- (3) Avec les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^2$ , on définit l'application  $s : V \rightarrow V$  par la formule  $s((x, y)) := (y, y)$ . Montrer que  $s$  définit une application linéaire  $\bar{s} : V/W \rightarrow V$  et interpréter la graphiquement.
- (4) Que vaut  $\pi \circ \bar{s}$ ? Interpréter graphiquement la composée  $\bar{s} \circ \pi$ .

- (5) Si on pose  $X := (1,1).\mathbb{R}$ , à quoi est isomorphe  $V$  ?
- (6) Reprenez les questions précédentes avec  $V$  et  $W$  quelconque.

**Exercice 7** (Dévissage).

Soient  $H$  et  $Q$  deux groupes abéliens. On identifie  $H$  au sous-groupe  $\{(h, 0), h \in H\}$  du produit  $H \times Q$ . On note  $\pi : H \times Q \rightarrow (H \times Q)/H$  la projection canonique.

- (1) Montrer que  $(H \times Q)/H$  est isomorphe à  $Q$ .
- (2) On identifie  $(H \times Q)/H$  à  $Q$ . Montrer que dans ce cas, il existe un morphisme de groupes  $s : Q \rightarrow H \times Q$  tel que la composée  $\pi \circ s$  soit égale à l'identité de  $Q$ . (Dans ce cas, on dit que  $s$  est un *relèvement* de  $\pi$ .)
- (3) Réciproquement, montrer que s'il existe un morphisme de groupes  $s : A/H \rightarrow A$  tel que  $\pi \circ s = \text{Id}_{A/H}$ , alors  $A$  est isomorphe au produit direct  $A \cong H \times A/H$ .

**Exercice 8** (Groupes cycliques).

Soit  $A$  un groupe abélien et soit  $a \in A$ . On considère l'application suivante

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow A \quad f(n) := n.a = \underbrace{a + a + \dots + a}_n,$$

pour  $n \geq 1$ . On pose  $f(0) = 0$  et  $f(n) := -f(-n)$  pour  $n < 0$ .

- (1) Si  $f$  est un epimorphisme, à quels types de groupes peut-être isomorphe  $A$  ?  
Tout groupe  $A$  isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est appelé *groupe cyclique*. Dans ce cas, il admet un élément  $a$  d'ordre  $n$  qui l'engendre, i.e.  $A = \{0, a, 2.a, \dots, (n-1).a\}$ .
- (2) Montrer que le produit de deux groupes cycliques d'ordre premiers entre eux est encore un groupe cyclique. Quel élément engendre ce groupe ?

**Exercice 9.**

- (1) Montrer que  $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \bar{+})$  est un *groupe de torsion*, c'est-à-dire que tous ses éléments ont un ordre fini.
- (2) Montrer que  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  possède un unique sous-groupe d'ordre  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et qu'il est cyclique.

**Exercice 10.**

- (1) Montrer que le groupe abélien  $(\mathbb{Q}, +, 0)$  n'a pas de sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ .
- (2) Montrer que  $\mathbb{Q}$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{Q}^2$ .
- (3) Écrire  $\mathbb{R}$  comme somme directe de copies de  $\mathbb{Q}$ .
- (4) Montrer que  $\mathbb{R}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ .

**Cours :** Bruno Vallette ([brunov@unice.fr](mailto:brunov@unice.fr)), **TDs :** François-Xavier Dehon ([dehon@unice.fr](mailto:dehon@unice.fr)) et Bruno Vallette

**Page web du cours :** Depuis <http://math.unice.fr/~brunov>, le lien vers le site du cours se trouve en bas de l'écran.

(Pour la retrouver rapidement : Taper "Bruno Vallette" sur Google. Cliquer sur le premier lien proposé.)