FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

SOUS-GROUPES DISTINGUÉS ET ACTION DE GROUPES

Exercice 1 (Union et intersection de sous-groupes)**.**

Soit un G un groupe et soient H_1 et H_2 deux sous-groupes de G.

(1) Montrer que, pour que l'union $H_1 \cup H_2$ soit un sous-groupe de G, il faut que $H_1 \subset H_2$ ou que $H_2 \subset H_1$.

(2) Si les ordres de H_1 et de H_2 sont finis et premiers entre eux, décriver l'intersection $H_1 \cap H_2$.

Exercice 2 (Le groupe $\mathbb{H}_8$)**.**

On pose

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

On considère le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{C})$ suivant

$$\mathbb{H}_8 := \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}.$$

(1) Montrer les relations suivantes

$$\begin{array}{lll} AB = C, & A^2 = -I, & AB = -BA, \\ BC = A, & B^2 = -I, & BC = -CB, \\ CA = B, & C^2 = -I, & CA = -CA. \end{array}$$

(2) Montrer que $\mathbb{H}_8$ est un groupe. On appelle $\mathbb{H}_8$ le *groupe des quaternions*.

(3) Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$.

(4) Déterminer le centre de $\mathbb{H}_8$. Montrer que son groupe dérivé est égal à $D(\mathbb{H}_8) = \{1, -1\}$.

(5) Montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$ sont distingués.

(6) Soit H un sous-groupe de $\mathbb{H}_8$. Montrer que la projection canonique $\pi : \mathbb{H}_8 \twoheadrightarrow \mathbb{H}_8/H$ n'admet aucune section.

Exercice 3 (Groupe symétrique, groupe alterné)**.**

(1) Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,;\, \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe distingué du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

(2) Déterminer le quotient $\mathfrak{S}_n/\mathcal{A}_n$ et en donner une section. Est-il possible de trouver une section dont l'image soit un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$?

(3) Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est-il isomorphe à un produit direct de deux groupes ?

Exercice 4 (Groupes diédraux)**.**

On reprend l'exemple du groupe diédral D_6 (Exercice 2, Feuille de TD2). On considère le groupe diédral D_3 qui est le groupe des isométries d'un triangle équilatéral.

Montrer que D_6 est isomorphe au produit direct $D_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 5 (Nombre d'orbites)**.**

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Montrer que le nombre d'orbites est égal à

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|,$$

où $X^g := \{x \in X\,;\, g.x = x\}$ est l'ensemble des éléments de X invariants sous l'action de g.
<u>Indication</u> : On pourra calculer le cardinal de l'ensemble $\{(g,x) \in G \times X\,;\, g.x = x\}$ de deux manières différentes.

Exercice 6 (Les bagues de Suleima)**.**

La fiancé de Suleima, orfèvre arithméticien, prépare dans son atelier une bague pour sa bien-aimée. Il a en effet promis, comme preuve d'amour, de lui offrir chaque mois une bague différentes. Les bagues qu'il confectionne sont en or et incrustées d'émeraudes, de saphirs ou de rubis. Chaque bague a dix pierres précieuses régulièrement réparties et qui se distingue des autres uniquement par l'ordonnancement des pierres qu'elle comporte.

Pendant combien de temps Suleima pourra être rassurée sur l'amour que lui voue son futur mari ?
<u>Indication</u> : On pourra faire opérer le groupe cyclique $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sur l'ensemble des applications de $\{1,\ldots,10\}$ dans $\{1,2,3\}$ et appliquer le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 7 (Action par conjugaison)**.**

Soit G un groupe fini.

(1) On définit l'application suivante

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g,x) &\longmapsto g.x := gxg^{-1}. \end{aligned}$$

Montrer qu'il s'agit d'une action du groupe G sur lui-même.

(2) Appliquer l'équation aux classes à cette action pour montrer qu'il existe une famille finie $\{H_i\}_{i\in I}$ de sous-groupes stricts de G (i.e. $\neq \{1_G\}$ et $\neq G$) telle que

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{i\in I}\frac{|G|}{|H_i|}.$$

Supposons maintenant que le cardinal de G soit égal à p^r avec p un nombre premier.

(3) Montrer que le centre de G n'est pas réduit au neutre. Pour cela montrer qu'il a au moins p éléments.

(4) Décrire G lorsque $r = 1$. Montrer que G est abélien lorsque $r = 2$. Déterminer tous les groupes abéliens d'ordre p^2 ?