Algèbre et Arithmétique — Mathématiques L3
Université de Nice Sophia-Antipolis — Année 2007-2008

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 4

ANNEAUX ET IDÉAUX

Exercice 1 (Image d'un idéal).

Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires.

(1) Si on suppose que f soit sujectif, montrer que l'image de tout idéal I de A par f est un idéal de B.

(2) Donner un exemple de morphisme $f : A \to B$ et d'idéal I de A tel que $f(I)$ ne soit pas un idéal de B.

Exercice 2 (Radical d'un idéal).

Soit A un anneau commutatif unitaire et soit I un idéal de A. On définit son *radical* par

$$\mathrm{Rad}(I) = \sqrt{I} := \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

(1) Montrer que $I \subset \sqrt{I}$.

(2) Montrer que le radical d'un idéal est encore un idéal.

(3) Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

(4) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.

(5) Décrire le radical des idéaux de $\mathbb{Z}$.

Le radical de l'idéal $I = (0)$, est appelé la *nilradical.* Il est égal à

$$\mathrm{Nil}(A) = \sqrt{(0)} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0\}.$$

C'est l'ensemble des éléments nilpotents de A.

(6) Soit I un idéal de A et $\pi : A \to A/I$ la projection canonique. Que vaut l'image réciproque $\pi^{-1}\big(\mathrm{Nil}(A/I)\big)$ du nilradical de A/I par π ?

(7) Montrer que le seul élément nilpotent de $A/\mathrm{Nil(A)}$ est l'élément nul.

(8) Montrer que le nilradical de A est l'intersection de tous les idéaux premiers de A. Soit I un idéal de A, on conclure que le radical de I est l'intersection de tous les idéaux premiers de A qui contiennent I.

Exercice 3 (Corps des fractions).

Soit A un anneau commutatif unitaire intègre. Sur l'ensemble $X := A \times (A - \{0\})$, on considère la relation :

$$(n, d)\,\mathcal{R}\,(n', d') \quad \text{si} \quad nd' = n'd.$$

(1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

On note Frac(A) l'ensemble quotient par cette relation, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence. Et on écrit $\frac{n}{d}$ la classe de (n, d).

(2) Montrer que les deux lois de composition interne suivantes sont bien définies

$$\frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} := \frac{n_1 d_2 + n_2 d_1}{d_1 d_2} \quad \text{et} \quad \frac{n_1}{d_1} . \frac{n_2}{d_2} := \frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}.$$

(3) Montrer que Frac(A) est un corps. On appelle ce corps, le *corps des fractions de A*.

(4) Que se passe-t-il si A n'est pas intègre ?

(5) Décrire les corps de fractions Frac($\mathbb{Z}$), Frac($\mathbb{K}[X]$), avec $\mathbb{K}$ un corps, et Frac($\mathbb{K}$).

(6) On considère l'application suivante

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \iota : & A & \to & \mathrm{Frac}(A) \\ & a & \mapsto & \dfrac{a}{1} \end{array} \right.$$

Montrer que ι est un morphisme d'anneaux.

(7) (Propriété universelle des corps de fractions) Montrer que tout morphisme d'anneaux $f : A \to \mathbb{K}$, avec $\mathbb{K}$ un corps, se factorise de manière unique en $f = \bar{f} \circ \iota$ où $\bar{f} : \mathrm{Frac}(A) \to \mathbb{K}$ est un morphisme de corps.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Frac}(A) \arrow[d, dashed, "\exists ! \bar{f}"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Exercice 4 (Lemme des restes chinois II, le retour)**.**

Soit p et q deux nombres premiers entre eux. Dans la démonstration du lemme des restes chinois, nous avons décrit un isomorphisme d'anneaux

$$\varphi \ : \ \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Expliciter la réciproque de φ.

<u>Indication</u> : Aller revoir votre cours de l'an dernier.