FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 4

ANNEAUX ET IDÉAUX

Exercice 1 (Image d'un idéal).

Soit $f: A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs unitaires.

- (1) Si on suppose que f soit sujectif, montrer que l'image de tout idéal I de A par f est un idéal de B.
- (2) Donner un exemple de morphisme $f:A\to B$ et d'idéal I de A tel que f(I) ne soit pas un idéal de B.

Exercice 2 (Radical d'un idéal).

Soit A un anneau commutatif unitaire et soit I un idéal de A. On définit son radical par

$$\operatorname{Rad}(I) = \sqrt{I} := \{ x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I \}.$$

- (1) Montrer que $I \subset \sqrt{I}$.
- (2) Montrer que le radical d'un idéal est encore un idéal.
- (3) Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
- (4) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer que $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
- (5) Décrire le radical des idéaux de \mathbb{Z} .

Le radical de l'idéal I = (0), est appelé la nilradical. Il est égal à

$$Nil(A) = \sqrt{(0)} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0\}.$$

C'est l'ensemble des éléments nilpotents de A.

- (6) Soit I un idéal de A et $\pi:A\to A/I$ la projection canonique. Que vaut l'image réciproque $\pi^{-1}(\mathrm{Nil}(A/I))$ du nilradical de A/I par π ?
- (7) Montrer que le seul élément nilpotent de A/Nil(A) est l'élément nul.
- (8) Montrer que le nilradical de A est l'intersection de tous les idéaux premiers de A. Soit I un idéal de A, on conclure que le radical de I est l'intersection de tous les idéaux premiers de A qui contiennent I.

Exercice 3 (Corps des fractions).

Soit A un anneau commutatif unitaire intègre. Sur l'ensemble $X:=A\times (A-\{0\})$, on considère la relation :

$$(n,d) \mathcal{R}(n',d')$$
 si $nd' = n'd$.

(1) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

On note $\operatorname{Frac}(A)$ l'ensemble quotient par cette relation, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence. Et on écrit $\frac{n}{d}$ la classe de (n,d).

(2) Montrer que les deux lois de composition interne suivantes sont bien définies

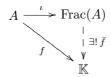
$$\frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} := \frac{n_1 d_2 + n_2 d_1}{d_1 d_2} \quad \text{et} \quad \frac{n_1}{d_1} \cdot \frac{n_2}{d_2} := \frac{n_1 n_2}{d_1 d_2}.$$

- (3) Montrer que Frac(A) est un corps. On appelle ce corps, le corps des fractions de A.
- (4) Que se passe-t-il si A n'est pas intègre?
- (5) Décrire les corps de fractions $\operatorname{Frac}(\mathbb{Z})$, $\operatorname{Frac}(\mathbb{K}[X])$, avec \mathbb{K} un corps, et $\operatorname{Frac}(\mathbb{K})$.
- (6) On considère l'application suivante

$$\begin{cases}
\iota: A \to \operatorname{Frac}(A) \\
a \mapsto \frac{a}{1}
\end{cases}$$

Montrer que ι est un morphisme d'anneaux.

(7) (Propriété universelle des corps de fractions) Montrer que tout morphisme d'anneaux $f:A\to\mathbb{K}$, avec \mathbb{K} un corps, se factorise de manière unique en $f=\bar{f}\circ\iota$ où $\bar{f}:\operatorname{Frac}(A)\to\mathbb{K}$ est un morphisme de corps.



Exercice 4 (Lemme des restes chinois II, le retour).

Soit p et q deux nombres premiers entre eux. Dans la démonstration du lemme des restes chinois, nous avons décrit un isomorphisme d'anneaux

$$\varphi : \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Expliciter la réciproque de φ .

Indication: Aller revoir votre cours de l'an dernier.