Algèbre et Arithmétique
Université de Nice Sophia-Antipolis

Mathématiques L3
Année 2007-2008

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE LA FEUILLE DE TD 5

IDÉAUX PREMIERS ET MAXIMAUX

Exercice 1 (Produit cartésien)**.**

Soit A et B deux anneaux commutatifs unitaires. On considère leur produit cartésien $A \times B$. On rappelle que l'on munit ce produit cartésien d'une structure d'anneau de la manière suivante :

$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b') \quad \text{et} \quad (a, b).(a', b') := (a.a', b.b').$$

Le neutre pour la somme est $(0, 0)$ et le neutre pour le produit est $(1, 1)$.

(1) Montrer que l'anneau produit $A \times B$ n'est pas intégre.

On a $(1, 0).(0, 1) = (0, 0)$ donc $(1, 0) \neq (0, 0)$ (et $(0, 1)$) est un divisieur de zéro.

(2) Décrire l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $A \times B$.

L'ensemble $(A \times B)^\times$ des inversibles est égal au produit cartésien $A^\times \times B^\times$ des inversibles de A et de B.

(3) En conclure que le produit cartésien de deux anneaux unitaires (voire de deux corps) n'est en jamais un corps.

Dans le produit cartésien de deux anneaux unitaires, nous avons les deux éléments $(1, 0)$ et $(0, 1)$ qui ne sont pas nuls mais pas non plus inversibles.

(4) Que se passe-t-il dans le cas des nombres complexes.

Dans le cas des nomnbres complexes, $\mathbb{C}$ est bien égal au produit cartésien de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}$ mais la structure de corps n'est pas celle décrite ci-dessus (i.e. celle du produit cartésien). On a défini une autre structure d'anneaux dessus (le produit est différent : $(a, b).(a', b') = (a.a' - b.b', a'.b + a.b')$) ! Il n'y a donc pas de contradiction.

Exercice 2 (Lemme des restes chinois III)**.**

Soit I et J deux idéaux d'un anneau A.

(1) Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux injectif

$$\Phi \ : \ A/I \cap J \xrightarrow{\sim} A/I \times A/J.$$

On considère le morphisme $\varphi \ : \ A \to A/I \times A/J$ qui envoie un élément $a \in A$ sur la paire constituée de la classe de a modulo I et de la classe de a modulo J. C'est un morphisme d'anneaux dont le noyau est égal à $I \cap J$ [à vérifier]. Par théorème du cours, le morphisme φ

passe donc au quotient et définit un morphisme injectif d'anneaux $\Phi : A/I\cap J \rightarrowtail A/I \times A/J$.

(2) Montrer que le morphisme Φ est un isomorphisme si et seulement si $I + J = A$.

Par théorème du cours, le morphisme Φ est un morphisme surjectif si et seulement si φ est surjectif. Comme $I + J$ est un idéal de A, on sait que $I + J = A$ si et seulement si $1 \in I + J$. On montre donc que φ est surjectif si et seulement si $1 \in I + J$.

($\Longleftarrow$) Dans ce cas, il utilise les mêmes arguments que pour l'exercice 4 de la feuille 4 (Théorème de Bezout).

($\Longrightarrow$) Si φ est surjective, alors la paire $([1]_I, [0]_J)$ est atteinte par un élément $x \in A$. C'est-à-dire que $x \in J$ et $x = 1 + i$, avec $i \in I$. Donc $1 = x - i \in I + J$.

(3) Appliquer cet isomorphisme aux anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$.

Dans ces deux cas, tous les idéaux sont principaux. Soient $I = n\mathbb{Z}$ et $J = m\mathbb{Z}$ deux idéaux de $\mathbb{Z}$. Comme $I \cap J = \mathrm{ppcm}(n, m)\mathbb{Z}$ et $I + J = \mathrm{pgcd}(n, m)\mathbb{Z}$, on a toujours

$$\mathbb{Z}/\mathrm{ppcm}(n, m)\mathbb{Z} \rightarrowtail \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

qui est un isomorphisme si et seulement si n et m sont premiers entre eux. Dans ce cas, on retrouve le lemme des reste chinois

$$\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

De la même manière, soient $I = (P)$ et $J = (Q)$ deux idéaux de $\mathbb{K}[X]$ engendrés par deux polynômes P et Q respectivement. On a $I \cap J = (\mathrm{ppcm}(P, Q))$ et $I + J = (\mathrm{pgcd}(P, Q))$. D'où, on a toujours un morphisme injectif d'anneaux

$$\mathbb{K}[X]/(\mathrm{ppcm}(P, Q)) \rightarrowtail \mathbb{K}[X]/(P) \times \mathbb{K}[X]/(Q),$$

qui est un isomorphisme si et seulement si P et Q sont premiers entre eux. Dans ce cas, on retrouve un lemme des reste chinois pour les polynômes

$$\mathbb{K}[X]/(P.Q) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[X]/(P) \times \mathbb{K}[X]/(Q).$$