# FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 5

## IDÉAUX PREMIERS ET MAXIMAUX

**Exercice 1** (Produit cartésien)**.**
Soit $A$ et $B$ deux anneaux commutatifs unitaires. On considère leur produit cartésien $A \times B$. On rappelle que l'on munit ce produit cartésien d'une structure d'anneau de la manière suivante :

$$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b') \quad \text{et} \quad (a,b).(a',b') := (a.a', b.b').$$

Le neutre pour la somme est $(0,0)$ et le neutre pour le produit est $(1,1)$.

(1) Montrer que l'anneau produit $A \times B$ n'est pas intégre.
(2) Décrire l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $A \times B$.
(3) En conclure que le produit cartésien de deux anneaux unitaires (voire de deux corps) n'est en jamais un corps.
(4) Que se passe-t-il dans le cas des nombres complexes.

**Exercice 2** (Corps)**.**
Soit $A$ un anneau. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) L'anneau $A$ est un corps.
(2) Les seuls idéaux de $A$ sont les idéaux triviaux $\{0\}$ et $A$.
(3) Tout morphisme d'anneaux non identiquement nul $f : A \to B$ est injectif.

**Exercice 3** (Lemme des restes chinois III)**.**
Soit $I$ et $J$ deux idéaux d'un anneau $A$.

(1) Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux injectif
$$\Phi \ : \ A/I \cap J \xrightarrow{\sim} A/I \times A/J.$$
(2) Montrer que le morphisme $\Phi$ est un isomorphisme si et seulement si $I + J = A$.
(3) Appliquer cet isomorphisme aux anneaux $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$.

**Exercice 4** (Idéaux de $\mathcal{C}(I)$)**.**
On considère l'intervalle $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues de de $I$ dans $\mathbb{R}$. Avec l'addition $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ et le produit $(f.g)(x) := f(x).g(x)$ des fonctions, $\mathcal{C}(I)$ est un anneau.

(1) Quel est le neutre pour le produit ? Quels sont les éléments inversibles de $\mathcal{C}(I)$ ?
(2) Quelle est la forme des idéaux maximaux de $\mathcal{C}(I)$ ?

(3) Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $\mathcal{C}(I)$. A quel anneau est isomorphe le quotient $\mathcal{C}(I)/\mathfrak{m}$?

**Exercice 5** (Topologie de Zariski)**.**

Soit $A$ un anneau commutatif unitaire. On considère l'ensemble $\operatorname{Spec} A$ des idéaux premiers ($\neq A$) de $A$. Cet ensemble est appelé le *spectre* de $A$. On va munir cet ensemble d'une topologie de la manière suivante. Pour tout sous-ensemble $E$ de $A$, on considère l'ensemble $Z(E) := \{\mathfrak{p} \text{ premier}, E \subset \mathfrak{p}\} \subset \operatorname{Spec} A$ des idéaux premiers de $A$ contenant $E$.

(1) Montrer que $Z(E) = Z((E)) = Z(\operatorname{Rad}((E)))$, où $(E)$ est l'idéal engendré par $E$ et où Rad est le radical d'un idéal (cf. exercice 2, TD 4).

(2) Montrer que $Z(\{0\}) = \operatorname{Spec} A$ et que $Z(A) = \emptyset$.

(3) Soit $\{E_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ une famille de sous-ensembles de $A$. Montrer que

$$\bigcap_{\omega\in\Omega} Z(E_\omega) = Z(\bigcup_{\omega\in\Omega} E_\omega).$$

(4) Soient $I$ et $J$ deux idéaux de $A$. Montrer que

$$Z(I) \cup Z(J) = Z(IJ) = Z(I \cap J).$$

Les relations des questions 2, 3 et 4 démontrent que les ensembles de la forme $Z(E)$ sont des fermés pour une topologie sur $\operatorname{Spec} A$. Cette dernière est appelée *topologie de Zariski.*

(5) Représenter graphiquement les espaces topologiques $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $\operatorname{Spec} \mathbb{R}$, $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]$ et $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[X]$ et décrire leur topologie de Zariski.

(6) Montrer qu'un "point" $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ est fermé si et seulement si $\mathfrak{p}$ est maximal.

**Exercice 6** (Anneau local)**.**

Si un anneau $A$ ne possède qu'un seul idéal maximal $\mathfrak{m}$, alors on dit que c'est un *anneau local.*

(1) Soit $A$ un anneau et $\mathfrak{m} \neq A$ un idéal de $A$ tel que tout $x \in A - \mathfrak{m}$ soit inversible. Montrer que $A$ est un anneau local et que $\mathfrak{m}$ est son unique idéal maximal.

(2) Soit $A$ un anneau et $\mathfrak{m}$ un idéal maximal tel que tout élément de $1 + \mathfrak{m} = \{1 + x, x \in \mathfrak{m}$ soit inversible. Montrer que $A$ est local.

**Exercice 7** (Radical de Jacobson)**.**

On considère le *radical de Jacobson* $\mathfrak{R}$ qui est l'intersection de tous les idéaux maximaux de $A$. Montrer que $x \in \mathfrak{R}$ si et seulement si $1 - xy$ est inversible pour tout $y \in A$.