FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 10

IRRÉDUCTIBILITÉ DES POLYNÔMES

Exercice 1 (Polynômes irréductibles).
Parmi les polynômes suivants, lesquel sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$?

$$X^3 + 14,\ X^2 + 49,\ X^2 - 49,\ X^3 + 4$$

Exercice 2 (Division dans une extension).
Soit $K \subset L$ une extension de corps et $P, Q \in K[X]$. Montrer l'équivalence

$$P \text{ divise } Q \text{ dans } K[X] \iff P \text{ divise } Q \text{ dans } L[X].$$

Exercice 3 (Extensions et nombres premiers).
Montrer que si p et q sont des entiers premiers, alors $\mathbb{Q}[\sqrt{p} + \sqrt{q}] = \mathbb{Q}[\sqrt{p}, \sqrt{q}]$.

Exercice 4 (Factorisation).
Factoriser sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ le polynôme $X^4 + 4$.

Exercice 5 (Polynômes minimaux).
Donner les polynômes minimaux sur $\mathbb{Q}$ de $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ et de $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$.

Exercice 6 (Polynômes irréductibles II).
Le polynôme $X^4 + X^3 + 2X + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?
Le polynôme $X^4 - 10X^3 + 21X^2 - 10X + 11$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?

Exercice 7 (Polynômes irréductibles II).
Soit p un nombre premier, montrer que le polynôme $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$?
<u>Indication :</u> Utiliser $X = Y + 1$.