Algèbre et Arithmétique — Mathématiques L3

Université de Nice Sophia-Antipolis — Année 2008-2009

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 4

SOUS-GROUPES DISTINGUÉS ET GROUPES QUOTIENTS

Exercice 1 (Le groupe diédral D_6 [suite])**.**
On reprend l'énoncé de l'exercice 2 de la feuille de Travaux Dirigés 2. Soit $H :=< \sigma >$ le sous-groupe de D_6 engendré par σ.

(1) Le sous-groupe H est-il distingué dans D_6 ?

(2) Existe-t-il une structure de groupe sur D_6/H telle que la projection canonique $\pi : D_6 \twoheadrightarrow D_6/H$ soit un morphisme de groupes ?

(3) Donner deux paires (a, b) et (a', b') d'éléments de D_6 tels que a et a' (respectivement b et b') soient dans la même classe à gauche modulo H et tels que $a.b$ ne soient pas dans le même classe que $a'.b'$ module H.

On considère le sous-ensemble $R := SO(2) \cap D_6$ de D_6 formé des seules rotations.

(4) Pourquoi R est-il un sous-groupe de D_6 ?

(5) Montrer que R est un sous-groupe distingué des D_6 de deux manières différentes.

(6) Décrire le groupe quotient D_6/R. À quel groupe connu, ce quotient est-il isomorphe ?

(7) Décrire le produit dans le groupe quotient D_6/R à l'aide de représentants quelconques de deux classes.

(8) Donner un système de représentants $\Theta \subset D_6$ des classes à gauche modulo R.

(9) Est-il possible de trouver un système de représentants qui forme un sous-groupe de D_6 ? Dans ce cas, à quoi est isomorphe le groupe quotient D_6/R ?

Exercice 2 (Le groupe symétrique $\mathbb{S}_4$ [suite])**.**
On reprend l'exercice 3 de la feuille de Travaux Dirigés 2. Soit $H :=< (1234) >$ le sous-groupe engendré par (1234).

(1) Le sous-groupe H est-il distingué non trivial de $\mathbb{S}_4$?

(2) Donner un sous-groupe distingué de $\mathbb{S}_4$.

(3) Décrire le groupe quotient associé.

Exercice 3 (L'exemple $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**.**

(1) Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $n\mathbb{Z} := \{n.k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

(2) Pourquoi $n\mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe distingué de $\mathbb{Z}$?

(3) Montrer que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de cette forme.

Comme dans le cours, on note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \bar{+}, n\mathbb{Z})$ le groupe quotient. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on notera $\bar{k}$ la classe $k + n\mathbb{Z}$ de k modulo n.

(4) Démontrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe abélien.

(5) Que vaut $\overline{137} \bar{+} \overline{212}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$?

(6) “Arithmétique horlogère” [Gauss]
Je dois partir demain pour San Fransisco à 9 heures. Le train mettra 126 heures pour relier Nice à Vladivostok. Il faudra ensuite 358 heures au bateau pour franchir le Golden Gate Bridge. En arrivant au Pier 1, vais-je pouvoir boire mon café favori au Farmer Market dont les horaires d’ouverture sont 7 heures - 13 heures ?

Exercice 4 (Groupe symétrique, groupe alterné)**.**

(1) Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,;\, \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe distingué du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

(2) Décrire l’ensemble quotient $\mathfrak{S}_n/\mathcal{A}_n$ et en donner un système de représentants.

(3) À quel groupe est isomorphe le groupe quotient $\mathfrak{S}_n/\mathcal{A}_n$?

Exercice 5.

(1) Montrer que $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \bar{+})$ est un *groupe de torsion*, c’est-à-dire que tous ses éléments ont un ordre fini.

(2) Montrer que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ possède un unique sous-groupe d’ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et qu’il est cyclique.