FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 5

GROUPE SIMPLE, CENTRE ET GROUPE DÉRIVÉ

Exercice 1 (Centre)**.**

(1) Montrer que $Z(\mathbb{S}_n) = \{\mathrm{id}\}$, pour $n \geq 3$.

(2) Calculer le centre de D_6.

Exercice 2 (Groupe dérivé)**.**

(1) Montrer qu'un groupe G est abélien si et seulement si $D(G) = \{e\}$.

(2) Montrer que $D(\mathbb{S}_3) = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}$.

(3) Calculer le groupe dérivé $D(D_6)$ du groupe diédral.

(4) A quel groupe est isomorphe le groupe quotient $D_6/D(D_6)$?

Exercice 3 (Simplicité de $\mathcal{A}_n$)**.**

(1) Calculer $\mathcal{A}_4$ et montrer qu'il n'est pas simple.

Soit H un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_5$, avec $H \neq \{1\}$.

(2) Montrer que les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans $\mathcal{A}_5$.

(3) Montrer que si H contient un cycle d'ordre 5, alors il les contient tous.

(4) En déduire que $H = \mathcal{A}_5$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}_5$ est simple.

Soit H un sous-groupe distingué de $\mathcal{A}_n$, avec $H \neq \{1\}$. On considère $\sigma \in H - \{1\}$ et $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $b = \sigma(a) \neq a$.

(5) Soient $c \notin \{a, b, \sigma(b)\}$ et $\tau = (acb)$. Préciser $\rho := \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$ et montrer que $\rho \in H$.

(6) En déduire que le cardinal du support de ρ est inférieur ou égal à 5. Vérifier que $\rho \neq 1$.

Soit $E \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ de cardinal 5 contenant le support de ρ. On considère l'application i :

$$\mathcal{A}(E) \to \mathcal{A}_n \quad ; \quad u \mapsto \bar{u},$$

définie par $\bar{u}_{|E} = u$ et $\bar{u}_{|\{1,2,\ldots,n\}-E} = id$.

(7) En utilisant la question 4, montrer que $H = \mathcal{A}_n$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}_n$ est simple.

(8) En déduire que $D(\mathcal{A}_n) = D(\mathbb{S}_n) = \mathcal{A}_n$.

(9) Montrer que pour $n \geq 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathbb{S}_n$ sont : $\{1\}$, $\mathcal{A}_n$ et $\mathbb{S}_n$.