FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 6

PROPRIÉTÉ UNIVERSELLE DES GROUPES QUOTIENTS, SECTIONS ET PRODUITS

Exercice 1 (Théorème des restes chinois)**.**
Soient deux nombres entiers p et q premiers entre eux.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ est isomorphe au produit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

(2) Un général chinois est parti pour une bataille avec 386 soldats. A la fin du combat, il souhaite compter ses troupes. Il leur ordonne de se mettre en rang de p soldats et il note le nombre de soldats formant la dernière rangée. Puis il procède de même mais en les faisant se mettre en rang de q soldats. Quelles valeurs de p et q doit-il prendre ? Expliquer comment il s'y prend finalement pour compter précisement ses soldats.

(3) Que peut-on dire si p n'est pas premier avec q ?
(On pourra considèrer $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

Exercice 2 (Produit et quotient)**.**
On rappelle que le *produit* de deux groupes G_1 et G_2 est défini par la loi de composition interne

$$(g_1, g_2).(h_1, h_2) := (g_1.h_1, g_2.h_2)$$

sur le produit cartésien des ensembles sous-jacents $G := G_1 \times G_2$. Les groupes G_1 et G_2 s'injectent dans le produit G par

$$\begin{aligned} i_1 \,:\, G_1 \rightarrowtail G_1 \times G_2, &\quad g_1 \mapsto (g_1, e_2), \\ i_2 \,:\, G_2 \rightarrowtail G_1 \times G_2, &\quad g_2 \mapsto (e_1, g_2), \end{aligned}$$

où e_1 et e_2 sont les neutres de G_1 et G_2 respectivement.

(1) Montrer que l'image de i_1, notée $\overline{G}_1$ est un sous-groupe distingué de G.

(2) Donner un système de représentants du quotient $G/\overline{G}_1$ qui soit un sous-groupe de G, donner un sous-groupe de G qui soit isomorphe au groupe quotient $G/\overline{G}_1$ et donner une section du groupe quotient $G/\overline{G}_1$.

(3) Est-il possible de trouver un système de représentants du quotient $G/\overline{G}_1$ qui soit un sous-groupe distingué de G ?

(4) Montrer qu'un groupe G est isomorphe à un produit de groupes $G \cong G_1 \times G_2$ si et seulement si il existe dans G un sous-groupe distingué N isomorphe à G_1 et dont le groupe quotient G/N admet un système de représentants S qui soit un sous-groupe distingué isomorphe à G_2.

Exercice 3 (Groupes diédraux [suite]).
On reprend l'exemple du groupe diédral D_6 (Exercice 2, Feuille de TD2). On considère le groupe diédral D_3 qui est le groupe des isométries d'un triangle équilatéral.
Montrer que D_6 est isomorphe au produit direct $D_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 4 (Groupe symétrique, groupe alterné [suite]).
On reprend l'exercice 4 de la feuille de Travaux Dirigés 4. On rappelle que le sous-groupe alterné $\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n\,;\,\mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$ est un sous-groupe distingué du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et le quotient $\mathfrak{S}_n/\mathcal{A}_n$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(1) Déterminer une section du quotient $\mathfrak{S}_n/\mathcal{A}_n$. Est-il possible de trouver une section dont l'image soit un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$?
(2) Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est-il isomorphe au produit direct $\mathcal{A}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Exercice 5.

(1) Montrer que le groupe abélien $(\mathbb{Q}, +, 0)$ n'a pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.
(2) Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Q}^2$.
(3) Écrire $\mathbb{R}$ comme somme directe de copies de $\mathbb{Q}$.
(4) Montrer que $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$.