ALGÈBRE LINÉAIRE ET SCIENCE ÉCONOMIQUE, UN CAS EXEMPLAIRE

Jean **ARROUS**

Professeur de Sciences Économiques
à l'Université Robert Schuman-Strasbourg III

Vu du côté des économistes, mathématiques et science économique ne font pas bon ménage, c'est le moins que l'on puisse dire. La mathématisation de la science économique intervenue depuis la Seconde Guerre mondiale donne en effet lieu à d'incessantes querelles, une sorte de guerre des anciens et des modernes perpétuellement renouvelée. À terme, il sera possible d'intégralement mathématiser le domaine couvert par l'économie, disent les uns. Impossible de mettre l'humain en équations, disent les autres.

Pour notre part, nous pensons qu'il est des domaines de la science économique qui peuvent être mathématisés, tout comme il en est d'autres qui échapperont à la mathématisation. Ce qu'un économiste disparu il y a peu, N. GEORGESCU-ROEGEN résumait par la formule suivante : « Il y a une limite à ce que nous pouvons faire avec les nombres, tout comme il y a une limite à ce que nous pouvons faire sans eux » (GEORGESCU-ROEGEN [1958], p.275).

Le propos de cet article n'est pas d'ajouter une pierre supplémentaire à ce débat sur l'utilisation des mathématiques en économie mais, dans le droit fil de la citation précédente, de montrer qu'il est un domaine de la science économique, qualifié d'Analyse Entrées-Sorties, auquel l'algèbre linéaire semble si bien adaptée que l'on pourrait croire que cette dernière a été inventée à l'instigation des économistes. L'histoire de ces deux disciplines montre que ce n'est pas le cas.

En quelques mots, disons que l'Analyse Entrées-Sorties a été inventée par un économiste américain d'origine russe, Wassily LEONTIEF (1906-1998), prix Nobel 1973. Comme beaucoup d'européens de l'Est, il fit une partie de ses études à Berlin, où il approfondit ses connaissances en mathématiques, avant d'émigrer dans les années 30 aux États-Unis : c'est là qu'il mit au point l'Analyse Entrées-Sorties (Input-Output Analysis).

L'analyse microéconomique radioscopie l'activité économique à partir du comportement des agents individuels. L'analyse macroéconomique le fait à partir du comportement de quantités globales, qualifiées d'agrégats : le Produit Intérieur Brut (P.I.B.), la consommation des ménages, … Le point de départ de l'Analyse Entrées-Sorties est proche de celui de la macroéconomie : elle étudie l'activité économique à partir d'un découpage de cette dernière en branches. On entend par branches l'ensemble des entreprises qui fabriquent un produit homogène : caoutchouc, pétrole, bière, automobiles, …

Les différentes branches achètent et vendent les unes aux autres, le tableau de ces échanges inter-branches est donc un tableau carré. Vient s'ajouter à ce constat l'hypothèse, dite hypothèse de linéarité de LÉONTIEF, suivant laquelle les achats d'une branche aux autres branches sont proportionnels à la production de cette même branche : doublez la production d'automobiles, vous doublerez les achats de cette branche en acier, caoutchouc, verre, plastique, … Ces derniers achats sont qualifiés de consommations intermédiaires. Si l'on superpose à la description fournie par le tableau des échanges inter-branches l'hypothèse de linéarité, on voit aisément poindre l'intervention du calcul matriciel. Plus précisément, le calcul matriciel relatif aux matrices carrées, qui plus est à coefficients positifs, puisque tel est le signe des quantités échangées entre les différentes branches de toute économie.

C'est à ce point que l'algèbre linéaire constitue un cas véritablement exemplaire d'application des mathématiques à l'économie, sous la forme de théorèmes relatifs aux propriétés des matrices carrées à coefficients positifs. Il s'agit en l'espèce d'un ensemble constitué de théorèmes démontrés au début du XX^{e} siècle par PERRON et FROBENIUS et d'autres démontrés plus récemment (Cf. Appendice et Bibliographie). Or, les propriétés de ces matrices ont une interprétation économique en adéquation totale avec la nature du problème étudié. Les théorèmes viennent, de plus, conférer un caractère indispensable de généralité aux applications numériques que nous proposerons.

Achevons à ce point la présentation générale de l'Analyse Entrées-Sorties en indiquant que les différents biens produits dans une économie ne sont pas seulement utilisés à l'occasion des échanges inter-branches. Pour reprendre la terminologie de cette analyse, les biens sont utilisés non seulement en emplois intermédiaires, mais également en emplois dits finals : si l'électricité produite sert à faire fonctionner des locomotives et des alternateurs, elle sert également à éclairer et à chauffer les appartements des consommateurs finals que nous sommes. La somme des différents emplois finals de chacun des biens de l'économie est regroupée sous la forme d'une matrice, uniligne ou unicolonne, en fait unicolonne, on verra ultérieurement pourquoi.

Nous exposerons les fondements de l'Analyse Entrées-Sorties en deux temps. Dans le premier, une analyse fondée sur les seules quantités physiques des biens échangés nous conduira à définir et à construire une courbe, qualifiée de frontière des possibilités de production. Le second temps prendra en considération les prix des produits et fera apparaître une seconde courbe, qualifiée de frontière des prix des facteurs. Le grand intérêt de la construction de ces deux courbes est qu'à partir d'elles, on peut présenter le cœur de la problématique de la science économique.

1. L'analyse en termes physiques et l'étude de la rareté

L'Analyse Entrées-Sorties peut d'emblée être présentée à partir d'exemples numériques, ce qui constitue un atout pédagogique non négligeable. Pour ce faire, nous raisonnerons sur une économie « imaginaire » constituée de deux branches produisant respectivement blé et acier, par exemple.

Une économie à deux branches, c'est irréaliste, nous dira-t-on. Il existe de nombreux débats entre économistes sur la question de l'irréalisme des hypothèses qui fondent la théorie économique. Ces débats n'ont toutefois guère de portée en Analyse Entrées-Sorties. En effet, dans la mesure où les raisonnements que nous allons présenter utilisent l'algèbre linéaire, ils seront, par définition, aussi bien valables pour deux branches que pour 10, 50 ou 200, ces dernier cas étant par nature beaucoup plus réalistes, on en conviendra aisément.

En fait, pour la présentation de notre propos, le choix portant le plus à conséquence nous paraît être celui entre modèle à deux ou à trois branches. Le modèle à trois branches, on peut s'en douter, permet de mettre en évidence des propriétés plus nombreuses. À l'inverse, il ne permet pas de présenter de façon simple la frontière des possibilités de production. Nous « limiterons » donc l'exposé à celui du modèle à deux branches, et renvoyons le lecteur intéressé par plus de détails à ARROUS (1987).

Dans l'ensemble de ce qui suit, nous illustrerons l'activité d'une économie à deux branches à l'aide des données numériques suivantes :

		Emplois intermédiaires		Emplois finals	Total des emplois
		I	*II*		
Consommations intermédiaires	*I*	-	140	160	300
	II	120	-	80	200

Entrées-travail	300	400

Insistons d'abord sur le fait que les données des deux tableaux précédents sont en *quantités physiques* : quintaux de blé et tonnes d'acier. Intéressons-nous ensuite au tableau carré des échanges entre les branches *I* et *II*, tableau dit des échanges intermédiaires ou inter-branches. Par convention, ce tableau retrace en ligne les ventes d'une branche à l'autre branche – les emplois intermédiaires – , et en colonne les achats – les consommations intermédiaires – des branches. Enfin, le second tableau uniligne, indique les entrées-travail, les quantités de travail nécessaires à la production totale de chacun des deux biens.

1. Matrice technologique et équation fondamentale de l'Analyse Entrées-Sorties

Considérons maintenant le premier produit : la lecture de la première colonne du tableau des échanges intermédiaires nous indique que, pour produire 300 quintaux de blé, il faut utiliser 0 quintal de blé et 120 tonnes d'acier. Du fait de l'hypothèse de linéarité de Leontief, pour produire 1 quintal de blé, il faut donc consommer 0 quintal de blé et 0,4 tonne d'acier. On met ainsi en évidence deux coefficients, notés algébriquement a_{11} et a_{21}, qui indiquent la quantité des biens *I* et *II* nécessaire à la production d'une unité du bien *I*. On peut montrer de la même manière que la production d'un quintal de blé exige 1 unité de travail, quantité que nous noterons l_1.

Si l'on passe en revue les deux branches de l'économie, on voit ainsi apparaître, d'une part, une matrice carrée A, de dimension 2, et, d'autre part, une matrice ligne L (à deux éléments), qui décrivent les conditions physiques de la production dans l'économie considérée. La matrice A est qualifiée de *matrice technologique* : elle s'interprète par colonne et indique la quantité de consommations intermédiaires de chacun des produits nécessaire à la production d'une unité de chacun des biens. La matrice L est la *matrice des entrées-travail* : elle indique la quantité de travail qui doit être utilisée pour produire une unité de chacun des biens.

Les données numériques correspondantes sont ici :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad L = [\,1\ 2\,]\,.$$

Si l'on produit maintenant non pas 1 unité de chacun des biens, mais x_1 unités du premier et x_2 unités du second, nous représenterons la production globale des deux biens par le vecteur-colonne X suivant :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On pourra vérifier que les emplois intermédiaires associés à ce vecteur de productions totales s'écrivent AX.

Désignons par y_i les emplois finals de chacun des biens. Globalement, ils définissent le vecteur-colonne Y qui, dans le cas de deux biens, s'écrit :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

La production totale, X, est utilisée soit à des emplois intermédiaires AX, soit à des emplois finals Y. Ceci nous conduit à établir *l'équation fondamentale de l'Analyse Entrées-Sorties en termes physiques :*

$$\boxed{X = AX + Y}$$

À un vecteur de productions totales X, on peut donc associer un vecteur Y d'emplois finals : $Y = X - AX$. Ces derniers emplois représentent ce qui est disponible pour les consommateurs finals (ainsi que, entre autres, pour les exportations) une fois que l'on a retranché de la production totale ce qui est utilisé de façon intermédiaire.

Ajoutons à ce qui précède que *l'emploi total l*, associé au programme de production X s'écrit directement $l = LX$. En termes physiques, le fonctionnement de l'économie que nous étudions se résume donc aux deux écritures matricielles suivantes : $X = AX + Y$ et $l = LX$.

2. La matrice inverse de Leontief et le problème du planificateur

Intéressons-nous maintenant au problème inverse, celui qui consiste à se donner Y et à en déduire X. Il est mathématiquement possible de le résoudre, à condition que la matrice $I - A$ soit inversible. Si c'est le cas, on peut en effet écrire :

$$\boxed{X = [I - A]^{-1}.\ Y}$$

La matrice $[I - A]^{-1}$ est qualifiée de matrice inverse de LÉONTIEF.

C'est sous la forme de l'équation précédente que se présenta le problème qu'eurent à résoudre les planificateurs soviétiques. Fixons en effet a priori les besoins en chaussures, chemises, manteaux, … du « consommateur » soviétique type et multiplions ces quantités par le nombre de consommateurs, on obtient le vecteur Y de l'économie soviétique. Connaissant les structures de production de cette économie – la matrice technologique A et le vecteur d'entrées-travail L – , on en déduit aisément X et l, c'est-à-dire les programmes de production totale et d'emploi à prévoir, en tenant compte du fait qu'une partie de la production totale est utilisée en emplois intermédiaires.

En 1929, lors du lancement du premier Plan quinquennal, les planificateurs soviétiques ne disposaient pas d'ordinateurs pour inverser la matrice $I - A$. Pour ce faire, ils purent néanmoins disposer d'une application tout à fait étonnante de l'algèbre linéaire. Utilisant le théorème 6 présenté en Appendice, on peut en effet montrer que, dans le cas où A désigne la matrice technologique d'une économie produisant des emplois finals positifs, la matrice $[I - A]^{-1}$ peut être développée en série matricielle, soit :

$$[I - A]^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots$$

Le vecteur X de productions totales peut donc s'écrire sous la forme :

$$X = Y + A.Y + A^2.Y + \dots + A^n.Y + \dots$$

Cette dernière équation s'interprète aisément : pour produire X en productions totales de chacun des biens, il faut d'abord produire Y, c'est-à-dire les productions finales. À cela vient s'ajouter le terme $A.Y$, qui représente les emplois intermédiaires nécessaires à la production de Y ; puis le terme $A^2.Y$, qui représente les emplois intermédiaires nécessaires à la production de $A.Y$, et ainsi de suite. On voit ainsi comment les planificateurs soviétiques purent tenir compte de l'intégralité des besoins des citoyens : il leur suffisait de calculer le développement en série entière de X, ce qui conduisait à des calculs tout à fait accessibles avec les moyens techniques dont ils disposaient.

3. Valeur-travail et théorie de la valeur-travail

Poursuivons la présentation en nous intéressant maintenant à la quantité l de travail disponible dans l'économie. D'après ce qui précède, cette quantité s'écrit :

$$l = L.X = L.\ [I - A]^{-1}.Y$$

Posons par ailleurs :

$$L = [\ l_1\ \ l_2\ ] \ \text{ et } [I - A]^{-1} = J = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}.$$

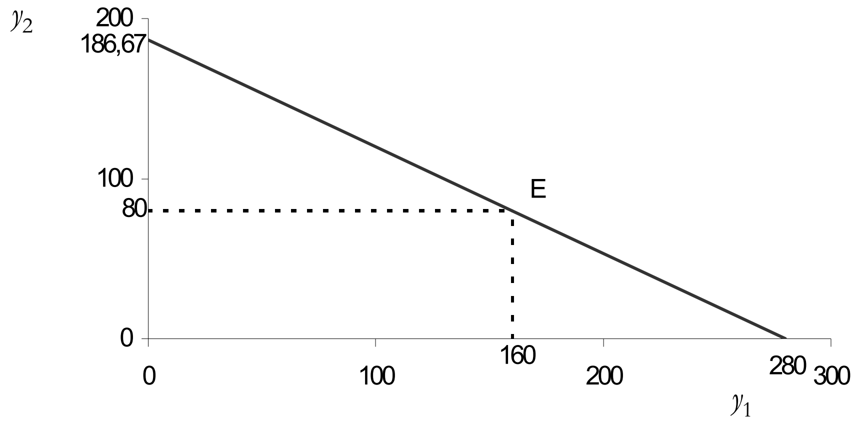
Dans ces conditions, l'équation relative à l'emploi total s'écrit :

$$\boxed{l = T_1 y_1 + T_2 y_2} \qquad \text{avec } T_1 = l_1 j_{11} + l_2 j_{21} \text{ et } T_2 = l_1 j_{12} + l_2 j_{22}.$$

Dans le plan $(y_1\ , y_2)$ des quantités d'emplois finals, cette équation est celle d'une droite, qualifiée de *frontière des possibilités de production*. Elle indique les quantités de blé et d'acier que l'on peut obtenir dans cette économie à l'aide de l unités de travail. Les quantités T_1 et T_2 sont appelées les *valeurs-travail* de chacun des biens : chacune désigne la quantité totale de travail qui est nécessaire, directement et indirectement, à la fabrication d'une unité finale du bien correspondant.

Dans notre exemple numérique, cette droite a pour équation :

$2{,}5\ .y_1 + 3{,}75\ .y_2 = 700$. Sa représentation graphique suit.



L'activité économique est ici représentée par le point E. L'emploi total, 700 unités de travail, est utilisé à raison de $1 \,.\, 300 = 300$ unités dans la première branche et de $2 \,.\, 200 = 400$ dans la seconde.

De plus, la pente $-\frac{T_1}{T_2}$ de la frontière des possibilités de production, ici $-\frac{2}{3}$, s'interprète comme un taux d'échange entre les produits : à quantité totale donnée de travail, si l'on veut augmenter d'une unité la quantité finale de blé, il faut réduire de $\frac{T_1}{T_2}$ la quantité finale d'acier. Dans cette économie où la *rareté* s'introduit par la quantité disponible de travail, la pente $-\frac{T_1}{T_2}$ de la frontière des possibilités de production s'interprète donc comme le taux d'échange entre les produits, T_1 unités d'un bien s'échangeant contre T_2 unités de l'autre en fonction de leurs contenus respectifs en travail. Alors que l'analyse qui précède n'a en aucun cas fait mention de monnaie, la pente de la frontière définit donc l'équivalent d'un *prix relatif* des biens produits dans cette économie.

Pour terminer sur ce point, signalons que les valeurs-travail que nous venons de calculer sont précisément celles que MARX chercha à mettre en évidence dans sa quête de la théorie de la valeur-travail, théorie qui est vérifiée quand les prix des produits sont proportionnels à leurs valeurs-travail (Cf. infra, § 2.1).

4. Deux applications de l'analyse en termes physiques

Considérons en premier lieu le cas où un chef d'État étranger fait une visite en France. La presse nous annonce que de gros contrats ont été signés, la vente de 20 tonnes d'acier par exemple. Numériquement, cela s'interprète en considérant que le nouveau vecteur Y des emplois finals s'écrit

$$Y = \begin{bmatrix} 160 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

La matrice technologique A n'a aucune raison d'être modifiée, puisque les conditions techniques de production du blé et de l'acier sont restées les mêmes.

Ces gros contrats vont vraisemblablement avoir l'effet d'un coup de fouet sur l'économie française. On le vérifie en calculant la valeur de la production totale X associée à la nouvelle valeur de Y, soit :

$$X = \begin{bmatrix} 319{,}44 \\ 227{,}77 \end{bmatrix}.$$

L'augmentation de l'utilisation finale d'un bien se traduit ainsi par l'augmentation de la production totale des deux biens. Ceci découle de l'interdépendance entre les branches, introduite par le canal des consommations intermédiaires. On constate également que l'emploi total augmente et correspond à l'utilisation de 775, au lieu de 700 unités de travail. Mais l'emploi n'augmente pas de façon proportionnelle dans chaque branche : l'impact est plus élevé dans la seconde, où l'emploi croît de 13,9 % contre 6,5 % dans la première.

La seconde application porte sur les effets du progrès technique et considère que ce dernier intervient sous la forme d'une réduction des coefficients de A ou de L. Pour illustrer notre propos, nous supposerons que la production d'une tonne d'acier n'exige plus que 0,5 quintal de blé au lieu de 0,7 quintal. De la sorte, la matrice technologique s'écrit maintenant :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour produire le vecteur Y « initial », il faut maintenant produire les quantités suivantes de chacun des biens :

$$X = \begin{bmatrix} 250 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

La nouvelle valeur de l'emploi total est LX = 610 unités de travail (au lieu de 700). Le progrès technologique envisagé ici est donc créateur de chômage. Là encore, du fait de l'interdépendance entre les branches, les effets de l'introduction du progrès technique se diffusent à l'ensemble de l'économie. Mais ils ne se diffusent pas de façon proportionnelle : la baisse de l'emploi est de 16,7 % dans la première branche, de 10 % dans la seconde.

L'emploi est modifié à la baisse suite à un effet que l'on peut qualifier d'«effet-offre», lié à la modification des conditions techniques de la production. En plus de cet effet négatif sur l'emploi, intervient également un « effet-demande » lié à ce que les prix des différents produits sont modifiés. Sans disposer à ce stade de nos développements des éléments du calcul des prix, on peut aisément imaginer que le progrès technologique examiné ici conduit à une baisse des coûts de production de l'acier et, partant, des prix des deux produits. Cette baisse des prix va susciter une augmentation de la demande de la part des consommateurs et de l'étranger : un tel « effet-demande » exerce donc un effet positif sur l'emploi. L'impact total sur l'emploi sera la somme algébrique de ces deux effets. Pour le déterminer, il faudrait ajouter aux données dont nous disposons jusqu'à présent des hypothèses portant sur la réaction des consommateurs et de l'étranger aux variations des prix des différents produits.

5. Productivité de la technologie et théorèmes de PERRON-FROBENIUS

Nous avons jusqu'à présent vu que les matrices utilisées par l'Analyse Entrées-Sorties sont à coefficients positifs. Mais cela ne signifie pas pour autant que ces coefficients puissent prendre n'importe quelles valeurs positives, et cela concerne tout particulièrement les coefficients de la matrice technologique A. L'économie décrite par la matrice A doit, en effet, produire des quantités positives de chacun des biens non seulement en termes de production totale, mais également en termes de production finale, La technologie est dite *productive* quand cette dernière propriété est vérifiée. Dans de telles conditions, l'économie dégage un surplus, du fait que la production est globalement supérieure aux consommations intermédiaires nécessaires à cette même production.

L'étude de la productivité de la technologie relève des conditions dites de HAWKINS-SIMONS, présentées par ces auteurs dans un article de 1949 : la technologie est productive quand les mineurs principaux successifs de la matrice
$[I - A]$ sont tous positifs (Sur la productivité de la technologie et les conditions de HAWKINS-SIMONS, nous renvoyons à ARROUS [1987], pp. 22-23 ; 34-35, et à DORFMAN-SAMUELSON-SOLOW [1958], p.215).

Dans le cas à deux biens que nous étudions, les deux mineurs principaux de

$[I - A]$ sont respectivement : 1 et $1 - a_{12}a_{21}$. Par ailleurs, la valeur propre dominante de la matrice A est définie algébriquement par : $s_m = \sqrt{a_{12}a_{21}}$. On en déduit donc que la *productivité de la technologie* est définie par la condition :

$$\boxed{s_m < 1}$$

De l'établissement de cette condition, nous pouvons maintenant passer à l'application des théorèmes de PERRON-FROBENIUS, mentionnés en Appendice.

Constatons tout d'abord que les valeurs propres de la matrice technologique A sont respectivement :

$$s_1 = \sqrt{0{,}28} \text{ et } s_2 = -\sqrt{0{,}28}\,.$$

La valeur propre dominante de A est donc : $s_m = \sqrt{0{,}28} = 0{,}529$, valeur qui est bien comprise entre 0,4 et 0,7 (cf. Théorème 4).

Intéressons-nous ensuite aux coefficients de la matrice inverse de LEONTIEF :

$$[I - A]^{-1} = \frac{1}{0{,}72}\begin{bmatrix} 1 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}.$$

On remarque qu'ils sont tous positifs. Ce résultat est particulièrement «heureux», dans la mesure où il implique que le vecteur X de productions totales associé à un vecteur Y positif de productions finales est lui-même positif. Or ce résultat n'est pas seulement un heureux hasard, il découle directement du Théorème 5, appliqué pour $\mu = 1$.

Comme les éléments de $[I - A]^{-1}$ sont tous positifs, il s'ensuit que le résultat obtenu dans l'application numérique relative aux gros contrats est bien tout à fait général : les nouvelles productions totales de chacun des biens sont *toutes* supérieures aux anciennes.

Dans l'application relative au progrès technique, on a vu que les nouvelles valeurs de la production et de l'emploi sont *toutes* inférieures aux valeurs anciennes. Comme l'un des coefficients de la nouvelle matrice technologique prend maintenant une valeur inférieure, le développement en série entière de $[I - A]^{-1}$ (Cf. supra § 1.2) nous permet de dire que la nouvelle matrice inverse de LEONTIEF a des coefficients inférieurs à ceux de l'ancienne. On peut donc en déduire que le résultat numérique ainsi obtenu est en réalité tout à fait général.

On notera pour terminer que ce dernier résultat s'inscrit dans un contexte plus général, aux termes duquel, suite au progrès technique, les nouvelles valeurs-travail des deux biens sont inférieures aux anciennes (numériquement ici : 2 et 2,625 ; au lieu de 2,5 et 3,75). Graphiquement, cela signifie que la nouvelle frontière des possibilités de production est située « au-dessous » de la précédente. Un tel résultat découle d'un théorème, qualifié de théorème de non-substitution et démontré de façon séparée par N. GEORGESCU-ROEGEN et P.A. SAMUELSON en 1949 (Cf. GEORGESCU-ROEGEN [1950] et [1951], SAMUELSON [1951]). Aux termes de ce théorème, dès l'instant qu'une technique domine une autre technique dans la production d'un vecteur positif de productions finales, elle la domine dans la production de l'ensemble des autres vecteurs (Cf. ARROUS [1987], pp.36-7 et 45-7).

2. La détermination des prix et la répartition du revenu national

Nous vivons dans des économies monétaires où les biens sont définis par leurs prix, et la seconde partie de nos développements est consacrée à leur détermination. Notre exposé se fera en deux temps. Dans le premier, nous nous intéresserons à la détermination des prix d'équilibre en fonction de la marge de profit. Le second en constituera un élargissement : traitant de la question de la répartition du revenu national entre salaires et profits, nous construirons une seconde courbe caractéristique du fonctionnement de l'économie, qualifiée de *frontière des prix des facteurs*. Dans les deux cas, l'algèbre linéaire et les théorèmes de PERRON-FROBENIUS tiendront, on le verra, une place essentielle.

1. Marge de profit et détermination des prix

Les prix que nous allons calculer sont qualifiés de *prix d'équilibre*, au sens où ils couvrent l'ensemble des coûts. Ces derniers comportent les coûts en consommations intermédiaires et les coûts en salaires, auxquels s'adjoint un montant correspondant aux profits. Les profits sont calculés par prélèvement d'une marge sur les deux premières catégories de coûts. On présentera l'analyse en deux temps, supposant dans le premier que la marge de profit est nulle, et qu'elle est différente de zéro dans le second.

La marge de profit est nulle

Désignons par :

$$P = [\, p_1 \, p_2 \,]$$

le vecteur-ligne des prix d'équilibre des deux biens et par w le taux de salaire monétaire.

Intéressons-nous à la relation que l'on peut établir sur une unité du premier bien. D'un côté, le prix est p_1 et, de l'autre, le coût en consommations intermédiaires s'écrit :

$$p_1 a_{11} + p_2 \, a_{21}$$

À ce dernier terme, il faut ajouter le coût salarial wl_1. Le prix d'équilibre du premier bien est donc défini par l'équation :

$$p_1 = p_1 a_{11} + p_2 \, a_{21} + wl_1.$$

Étendons le raisonnement au second bien. Les prix d'équilibre des deux biens de cette économie sont alors définis par l'équation matricielle suivante :

$$\boxed{P = P.A + w.L}\,.$$

Cette *équation de détermination des prix d'équilibre* est l'équivalent, dans la sphère des prix, de l'équation fondamentale de l'analyse en termes physiques, $X = AX + Y$.

On notera que, si la matrice $I\text{-}A$ est inversible, l'équation précédente peut également s'écrire :

$$\boxed{P = w\,.\,L\,.\,[I - A]^{-1}}.$$

Ce résultat est fort intéressant : il nous indique en effet que les prix d'équilibre sont déterminés, au coefficient w près, par les conditions techniques de la production dans l'économie considérée, conditions déterminées par les matrices A et L. Reprenant les notations utilisées précédemment, on peut d'ailleurs écrire :

$$P = w\,.\,[\, T_1 \, T_2 \,].$$

On en déduit que le prix relatif $\frac{p_1}{p_2}$ des deux biens de cette économie est égal au rapport $\frac{T_1}{T_2}$ des valeurs-travail des deux biens, ces dernières tenant compte tant du travail direct que du travail indirect, intégré dans les consommations intermédiaires, nécessaire à la production des différents biens. Dans le cas où la marge de profit est nulle, *la théorie de la valeur-travail est donc vérifiée.* Dans une telle économie, les biens s'échangent entre eux, sur le marché cette fois, en fonction de leurs contenus respectifs en travail.

Allons plus loin. Les prix étant maintenant connus, on peut les intégrer dans le tableau en termes physiques du § 1 pour en déduire le tableau des échanges monétaires intervenant dans l'économie considérée.

Pour l'application numérique de cette question, on supposera que le taux de salaire monétaire est égal à 1. On en déduit donc que les prix d'équilibre des deux biens sont respectivement : 2,5 et 3,75. De la sorte, il nous suffit de multiplier la première ligne du tableau des échanges en termes physiques par 2,5 et la seconde par 3,75 pour obtenir le tableau des échanges en termes monétaires, qualifié de *Tableau des Entrées-Sorties*. Les résultats sont les suivants :

		Emplois intermédiaires		Emplois finals	Total des emplois
		I	*II*		
Consommations intermédiaires	*I*	0	350	400	750
	II	450	0	300	750
Salaires		300	400		
Total des ressources		750	750		

On notera ici que le tableau que nous venons de présenter, qualifié en abrégé de T.E.S., est un des trois tableaux dits de synthèse de la Comptabilité nationale, par lesquels cette dernière présente une maquette globale du fonctionnement de l'activité économique d'un pays pendant une période donnée, généralement l'année.

Les prix des deux biens (p_1 = 2,5 et p_2 = 3,75) sont véritablement des prix d'équilibre, au sens où, pour tout autre vecteur de prix, on n'obtient pas, dans chaque branche, égalité entre le total des emplois et celui des ressources, comme c'est le cas ici (on pourra le vérifier en prenant, par exemple, $p_1 = 1$ et $p_2 = 1$).

La marge de profit est différente de zéro

Supposons maintenant qu'une marge de profit λ est prélevée sur l'ensemble des coûts, coûts en consommations intermédiaires et coûts en travail. L'équation de détermination des prix s'écrit alors :

$$P = (PA + wL) + \lambda(PA + wL)$$

De cette équation, on déduit le vecteur des prix :

$$\boxed{P = (1+\lambda)w\,.\,L\,.[\,I - (1+\lambda)A]^{-1}}\,.$$

Formellement, le calcul des prix n'est guère différent dans ce cas : il s'agit en effet d'obtenir l'inverse, non pas de la matrice $I - A$, mais de la matrice $I - (1+\lambda)A$. On voit ainsi que l'on passe d'un calcul à l'autre en « dilatant » la matrice A par le coefficient $1+\lambda$, où λ désigne la marge de profit. Ce faisant, on constate que le prix relatif des deux produits ne peut plus, sauf exception, être égal au rapport des valeurs-travail des deux biens : *la théorie de la valeur-travail n'est plus vérifiée*. Sans insister sur ce point ici, on notera que l'exception que nous venons de mentionner existe bel et bien. Elle correspond au cas dans lequel la proportion de travail et de consommations intermédiaires entrant dans la production unitaire de chacun des biens est identique dans chacune des branches. À ce point, on retrouve MARX, puisque, dans la terminologie de cet auteur, le cas ainsi considéré correspond à la « composition organique uniforme du capital ». De ce fait, la théorie de la valeur-travail, théorie qui eut une importance théorique considérable dans l'histoire du mouvement ouvrier au XXe siècle, n'est vérifiée que dans deux cas particuliers : celui où la marge de profit est nulle et celui dans lequel la composition organique du capital est la même dans toutes les branches (Cf. ARROUS [1987], pp.94-101). Perpétuel autodidacte, MARX ne connaissait pas l'algèbre linéaire : la présentation de ses travaux, la problématique de la valeur-travail et les débats qu'elle a suscités auraient été largement simplifiés par le recours à ce type d'outil mathématique.

Dans le cas où la marge de profit s'élève à 20 %, le vecteur P des prix d'équilibre des deux biens s'écrit :

$$P = [3{,}94 \quad 5{,}71]$$

À l'aide de ces prix, supérieurs à ceux obtenus précédemment, on déduit le T.E.S. correspondant :

		Emplois intermédiaires		Emplois finals	Total des emplois
		I	*II*		
Consommations intermédiaires	*I*	0	551,74	630,56	1182,31
	II	685,26	0	456,84	1142,09
Salaires		300	400		
Profits		197,05	190,35		
Total des ressources		1182,31	1142,09		

Le Produit Intérieur Brut, le P.I.B., de cette économie se calcule directement à partir de ce tableau. Il est défini, entre autres, comme la somme des salaires et des profits distribués dans les deux branches, soit :

$$\text{P.I.B.} = 1087{,}4.$$

Dans le cas précédent avec marge de profit nulle, tout le P.I.B. était affecté à la rémunération des salaires. Ici, sur un total de 1087,4, on constate que 700, soit 64 %, représentent la part des salaires, tandis que la part du Revenu national revenant aux profits s'élève à 36 %. Des calculs qui précèdent, on déduit donc la répartition du Revenu national dans l'économie considérée.

2. La frontière des prix des facteurs

On vient d'examiner deux cas numériques de répartition du Revenu national. Intéressons-nous maintenant à cette même répartition pour l'ensemble des valeurs admissibles de la marge de profit : cette étude va mettre en évidence une courbe, qualifiée de *frontière des prix des facteurs* qui est, pour l'analyse en termes monétaires, l'équivalent de ce qu'est la frontière des possibilités de production dans l'analyse en termes physiques. Or, pour examiner cette question de façon systématique, les théorèmes de PERRON-FROBENIUS vont être d'une utilité décisive.

L'analyse qui suit utilise deux hypothèses simplificatrices. On suppose en premier lieu que l'unité du premier bien définit l'unité monétaire, le « numéraire ». On suppose en second lieu que la consommation des salariés ne porte que sur le premier bien. Leur niveau de vie, leur « salaire réel », sera donc défini par le nombre d'unités de ce bien qu'ils peuvent se procurer, donc, par le rapport entre le salaire monétaire et le prix de ce bien.

La relation inverse entre marge de profit et taux de salaire réel

Dans les conditions définies par les hypothèses précédentes, désignons par $w^{(1)}$ la valeur du taux de salaire quand le premier bien est choisi comme numéraire. Multiplions alors les deux membres de l'équation de détermination des prix (Cf. supra, § 2.1) par la matrice-colonne : $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, il vient alors :

$$[p_1\, p_2] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = p_1 = 1 = w^{(1)}\,(1+\lambda)\,.\,L\,.\,[\,I-(1+\lambda)A]^{-1}\,.\,e_1 \text{ soit encore}$$

$$\boxed{w^{(1)}\,(1+\lambda)\,.\,L\,.\,[\,I-(1+\lambda)A]^{-1}\,.\,e_1 = 1}$$

En fonction du degré de familiarité que l'on a de ces calculs, on peut voir, immédiatement ou non, que l'expression précédente est l'équation d'une courbe dans le plan $(\lambda, w^{(1)})$, qui est précisément la *frontière des prix des facteurs*.

À ce point, le théorème 5 de PERRON-FROBENIUS nous permet de préciser les propriétés de cette frontière. Posons pour cela $v = 1 + \lambda$. D'après ce théorème, on peut dire que, quand la marge de profit varie, les coefficients de $[\,I-(1+\lambda)A]^{-1}$ sont positifs et sont également fonction croissante de λ. En conséquence, quand λ augmente, $w^{(1)}$, le salaire réel, ne peut que diminuer, puisque le produit de $w^{(1)}$ par une quantité qui augmente reste constant et égal à 1. Ainsi, le taux de salaire réel diminue quand la marge de profit augmente : la frontière des prix des facteurs est une courbe décroissante.

Une valeur maximale de la marge de profit ?

Intéressons-nous maintenant à l'équation algébrique de cette frontière. Partons pour cela de l'équation de détermination des prix d'équilibre des biens (dans le cas à deux biens, avec $a_{11} = 0$ et $a_{22} = 0$) :

$$p_1 = (a_{21}p_2 + wl_1)\,(1+\lambda) \qquad p_2 = (a_{12}p_1 + wl_2)\,(1+\lambda)$$

Divisant les deux équations par p_1 et éliminant ensuite $\frac{p_2}{p_1}$ entre les deux équations, on vérifiera que l'on parvient à l'équation suivante :

$$\boxed{\frac{w}{p_1} = \frac{1-a_{12}a_{21}(1+\lambda)^2}{l_2a_{21}(1+\lambda)+l_1} \cdot \frac{1}{1+\lambda}}\,.$$

qui, sous une forme plus classique, est *l'équation de la frontière des prix des facteurs*, relative au cas que nous étudions. En utilisant cette formulation, on peut d'ailleurs vérifier que $\frac{w}{p_1}$ est une fonction décroissante de $1 + \lambda$, donc de λ : un tel résultat s'obtient par simple dérivation, sans avoir recours au théorème 5.

L'équation précédente nous permet de calculer aisément les points de la frontière sur les axes. Pour $\lambda = 0$, la valeur maximale du taux de salaire réel est :

$$\frac{w}{p_1} = \frac{1 - a_{12}a_{21}}{l_2 a_{21} + l_1}.$$

De la même manière, la valeur maximale de la marge de profit est obtenue pour :

$$\frac{w}{p_1} = 0,$$

soit :

$$\lambda_m = \frac{1}{\sqrt{a_{12}a_{21}}} - 1 .$$

On a vu précédemment (cf. supra, § 1.5) que la valeur propre dominante s_m de la matrice technologique A s'écrit :

$$s_m = \sqrt{a_{12}a_{21}} .$$

On a donc la relation :

$$\boxed{\lambda_m = \frac{1}{s_m} - 1}.$$

Cette dernière relation est tout à fait étonnante et mérite commentaire. Reprenons pour cela notre démonstration au point où nous l'avons laissée à la fin du § 2.1.
Pour une valeur nulle de la marge de profit, tout le Revenu national est attribué aux salariés. Pour une valeur de la marge de profit égale à 20%, la part salariale représente 64 % de ce Revenu, la part revenant aux profits correspondant aux 36 % restants.

L'étude associée à ces deux valeurs de la marge de profit conduit à se poser la question de savoir s'il existe une valeur maximale de la marge de profit. L'algèbre linéaire et les théorèmes de PERRON-FROBENIUS nous montrent que c'est bien le cas. Qui plus est, cette valeur est directement liée aux caractéristiques mêmes de la technologie, sous la forme de la *valeur propre dominante de la matrice technologique*. Pour la valeur correspondante de la marge de profit, l'intégralité du Revenu national est distribuée sous forme de profits et la part salariale est nulle.

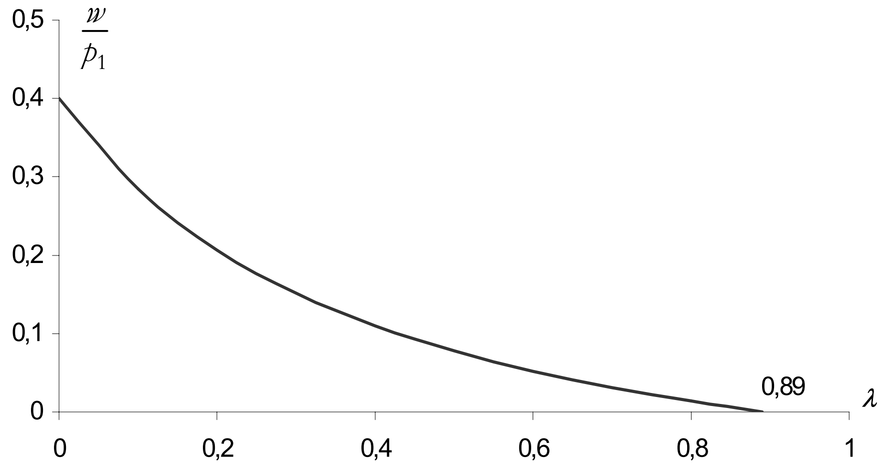
Marge de profit et répartition du Revenu national

Étudions pour terminer les conditions de la répartition du Revenu national en fonction des valeurs de la marge de profit. Avec les données numériques que nous utilisons, on vérifiera que l'équation de la frontière des prix des facteurs s'écrit :

$$\frac{w}{p_1} = \frac{1 - 0{,}28\cdot(1+\lambda)^2}{1 + 0{,}8\cdot(1+\lambda)} \times \frac{1}{1+\lambda} .$$

En calculant les coordonnées des points sur les axes, on en déduit la valeur maximale de la marge de profit, soit 0,89 ainsi que la valeur maximale du taux de salaire réel, soit 0,4. On notera également (cf. Théorème 1) que le vecteur propre associé à la valeur maximale de la marge de profit est positif, résultat particulièrement heureux dans la mesure où les composantes de ce vecteur sont des prix.

La représentation graphique de la frontière des prix des facteurs est la suivante :



À chaque valeur de λ, donc à chaque état du rapport de forces entre salariés et capitalistes, est ainsi associé un certain partage du Revenu national. Aux données précédentes, ajoutons celles relatives à une marge égale à 50 %. On vérifiera que l'on obtient : $p_1 = 8{,}92$ et $p_2 = 12{,}36$. De ces valeurs, on peut déduire le T.E.S. correspondant ainsi que le partage du Revenu national qui s'établit à 29 % pour la part salariale et 71 % pour la part revenant aux profits. Les résultats relatifs à la répartition du Revenu national peuvent ainsi être consignés dans le tableau suivant :

Marge de profit(en %)	Part salariale(en %)	Part des profits(en %)
0	100	0
20	64	36
50	29	71
89	0	100

Si l'on reprend les statistiques de la Comptabilité nationale, il apparaît que, depuis le début de l'actuelle crise économique, les parts du Revenu national ont connu des évolutions tout à fait considérables : ce sont les entreprises qui ont subi l'ajustement consécutif au premier choc pétrolier. Le balancier a fonctionné ensuite au profit des entreprises, du fait de l'augmentation du chômage et de la précarité. De 1967 à 1981, la part salariale est ainsi passée de 60 à 69 %, pour revenir à son niveau de 1967 en 1989. Depuis le début des années quatre-vingt-dix, elle reste à peu près constante, à un niveau proche de celui du milieu des années soixante.

Conclusion

Tel est, à nos yeux, l'essentiel des relations que l'on peut faire apparaître entre Analyse Entrées-Sorties et algèbre linéaire. L'algèbre linéaire fournit en premier lieu une méthode pour la mise en équations des problèmes de cette analyse ainsi qu'une technique de calculs des résultats, en utilisant, pour l'essentiel, l'inversion matricielle. Et, en second lieu, beaucoup plus étonnant, du fait des théorèmes de PERRON-FROBENIUS, elle fournit la confirmation théorique des résultats numériques ainsi obtenus.

Bilan d'autant plus étonnant que le domaine d'étude de l'Analyse Entrées-Sorties porte sur le cœur de la science économique. À nos yeux, la démarche de cette discipline se caractérise en effet par l'étude de l'interdépendance, entre les agents économiques, entre les régions, entre les nations. Or, à partir du moment où nous pouvons considérer que l'hypothèse de linéarité n'est pas trop irréaliste, ce qui s'avère être ici le cas, quoi de plus « naturel » que d'utiliser le calcul matriciel. De ce fait, il devient possible de traiter à l'aide de ce calcul des questions tout à fait centrales pour l'analyse économique et ce, tant sur le plan théorique que sur le plan empirique.

Sur le plan théorique, il devient possible d'analyser les conséquences de l'interdépendance tant au niveau des grandeurs physiques qu'à celui des grandeurs monétaires. Le premier niveau revient à traiter de la rareté, du contenu en travail des biens, du taux d'échange entre les produits. Il permet également, on l'a vu, de clarifier une question aussi décisive, aussi « redoutable » par ses conséquences humaines, qu'a pu être la théorie de la valeur-travail. Le second niveau revient à traiter de la répartition du Revenu national et de pouvoir suivre son évolution en fonction de l'état du rapport de forces entre salariés et capitalistes. Pour traiter de ces questions, il est tout à fait loisible, comme nous l'avons fait ici, de partir de données numériques imaginaires sans qu'elles ne nous éloignent véritablement de préoccupations concrètes. Or ces deux questions, la rareté et la répartition du Revenu national constituent, à nos yeux, le cœur de la problématique de la science économique. Bon nombre de manuels d'économie commencent en définissant la science économique à partir de la rareté et présentent de ce fait un graphique, non linéaire, qui n'est ni plus ni moins que la frontière des possibilités de production exposée plus haut. Quant à la répartition du Revenu national, on y fait constamment référence à travers l'exemple du partage du « gâteau » que représente ce Revenu. L'Analyse Entrées-Sorties, on l'a vu, permet d'expliciter tant la construction du graphique que le partage du « gâteau ».

On rejoint le plan empirique à travers le Tableau des Entrées-Sorties. Avec le T.E.E. (Tableau Économique d'Ensemble) et le T.O.F. (Tableau des Opérations Financières), il constitue l'un des trois tableaux de synthèse de la Comptabilité nationale. Ces trois tableaux donnent chacun une photographie de l'activité d'ensemble de l'économie d'un pays donné, vue sous différents angles, l'angle du T.E.S. étant celui des branches.

Dans notre présentation de l'Analyse Entrées-Sorties, nous sommes partis des données en termes physiques et en avons déduit les données en termes monétaires : dans cette mesure, l'Analyse Entrées-Sorties constitue en même temps la théorie du Tableau des Entrées-Sorties.

Quant aux utilisations empiriques de l'Analyse Entrées-Sorties, nous mentionnerons seulement celle qu'en fit … son créateur LÉONTIEF. Quand le gouvernement des U.S.A. sentit que la Seconde Guerre mondiale commençait à toucher à sa fin, en vue d'éviter les erreurs consécutives à la fin de la précédente guerre, il voulut avoir des prévisions sur l'évolution économique de l'après-guerre. Il commanda une étude à LÉONTIEF qui, avec des moyens de calcul rudimentaires par rapport à ceux dont nous disposons aujourd'hui, conclut de façon optimiste. L'effort de guerre avait laissé de côté, aux États-Unis même, tout un ensemble de besoins « civils » à satisfaire : la reconversion de l'économie américaine vers une économie de paix n'allait pas entraîner de difficultés insurmontables, en tout cas pas de crise majeure. Combinant données statistiques et algèbre linéaire, tel fut le diagnostic apporté par LEONTIEF pour étayer sa conclusion.

Appendice : Les théorèmes de PERRON-FROBENIUS

Ces théorèmes, relatifs aux propriétés des valeurs propres, des vecteurs propres et des inverses de matrices non-négatives, ont été proposés entre les années 1907 et 1912. On en trouvera un exposé dans ARROUS (1987), pp.74-84, ainsi que dans l'Appendice mathématique de PASINETTI (1977), pp.226-77.

Les théorèmes qui suivent portent sur les matrices irréductibles.

Théorème 1 : La valeur propre dominante s_m de A, matrice carrée non-négative, est positive. Le vecteur propre associé à s_m a toutes ses composantes positives.

Théorème 2 : À toute valeur propre α différente de s_m, il correspond un vecteur propre qui a au moins une composante négative.

Théorème 3 : La valeur propre dominante s_m de A est une fonction continue croissante des éléments de A.

Théorème 4 : La valeur propre dominante s_m de A est comprise entre le maximum et le minimum des sommes en ligne des éléments de A. La même propriété vaut également pour les colonnes.

Théorème 5 : Étant donné un réel $\mu > 0$, si $\mu > s_m$, alors : $[\mu I - A]^{-1} > 0$. De même, pour $\nu = \frac{1}{\mu}$ (avec $\nu < \frac{1}{s_m}$), $[I - \nu A]^{-1} > 0$. Les éléments de ces deux dernières matrices sont donc positifs. Ils sont de plus des fonctions continues et croissantes de ν, continues et décroissantes de μ.

Ajoutons à cette liste de théorèmes celui portant sur le développement en série entière d'une matrice carrée A à coefficients quelconques :

Théorème 6 : Étant donné un nombre positif ν et une matrice carrée A, la série matricielle νA est convergente si $\nu < \frac{1}{|s_m|}$, où s_m est la valeur propre de A de plus grand module.

Ce théorème étant acquis, il est ensuite possible de démontrer que, si ν demeure inférieur à la valeur citée plus haut, la série matricielle νA converge vers l'inverse de la matrice $[I - \nu A]$. On a donc la propriété suivante :

Si $\nu < \frac{1}{|s_m|}$, on peut écrire : $[I - \nu A]^{-1} = I + \nu A + (\nu A)^2 + (\nu A)^3 + \cdots$

La même propriété, appliquée à $\mu = \frac{1}{\nu}$, devient :

Si $\mu > |s_m|$, on peut écrire $[\mu I - A]^{-1} = \frac{1}{\mu} \cdot \left[I + \frac{1}{\mu} \cdot A + \left(\frac{1}{\mu} \cdot A\right)^2 + \cdots \right]$.

Bibliographie :

ARROUS J. (1987), *Analyse Multisectorielle et Croissance*, Economica, Paris

DORFMAN R. - SAMUELSON P.A. - SOLOW R.M. (1958), *Linear Programing and Economic Analysis*, Mac Graw Hill

FROBENIUS G., Über Matrizen aus positiven Elemente et Über Matrizen aus nicht negativen Elemente, *Sitzungsberichte der königlichen preussischen Akademie der Wissenschaften*, (1908), pp.471-6 ; (1909), pp.514-8 ; (1912), pp.456-77

GEORGESCU-ROEGEN N. (1950), Leontief's System in the Light of Recent Results, *Review of Economics and Statistics*, pp.214-22

GEORGESCU-ROEGEN N. (1951), Some Properties of a Generalized Leontief Model, in T.C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation,*, Wiley and Sons, New-York, pp.165-73

GEORGESCU-ROEGEN N. (1958), The Nature of Expectation and Uncertainty, in Georgescu-Roegen N., *Analytical Economics*, Harvard University Press, 1967, pp.241-75

HAWKINS D. - Simon H.A. (1949), Note : Some Conditions of Macroeconomic Stability, *Econometrica*, juillet-octobre, pp.245-8

PASINETTI L. L. (1977), *Lectures on the Theory of Production*, Macmillan Press Ltd,

PERRON O., Über Matrizen, *Mathematische Annalen*, vol. LXIV, (1907), pp.248-63

SAMUELSON P.A. (1951), Abstract of a Theorem Concerning Substituability in Open Leontief Models, in T.C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley and Sons, New-York, pp.142-46