Contrôle Continu 2 (novembre 2011)

Durée 1 heure

Il sera tenu compte dans le barème de la rédaction et du soin. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront également évaluées.

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Questions de cours.
Soit $f : V \to V$ un endomorphisme d'un espace vectoriel V.

(1) Donner la définition de vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Soit $g : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de dimension finie.

(2) Énoncer le théorème du rang appliqué à l'application linéaire g.

Exercice 1 (Application linéaire)**.**
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère l'application suivante

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f & : & \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & & P & \mapsto & (X-1)P' + 2P \ . \end{array}\right.$$

(1) Montrer que l'application f est linéaire.

(2) Écrire la matrice $M := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} := \{1, X, X^2\}$.

(3) Calculer la trace $\operatorname{tr} f$ et le déterminant $\det f$ de l'endomorphisme f.

(4) Écrire la matrice de passage $P := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id})$ de la famille de vecteurs

$$\mathcal{B}' := \{1, (X-1), (X-1)^2\}$$

dans la base $\mathcal{B}$.

(5) Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

(6) En déduire les coordonnées du polynôme $3 - 2X + 7X^2$ dans la base $\mathcal{B}'$.

(7) Que représente la matrice $P^{-1}MP$?

(8) Déterminer la matrice $P^{-1}MP$ de deux manières différentes.

Exercice 2 (Diagonalisabilité)**.**
On considère la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ suivante

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M.

(2) Déterminer le spectre de M, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de M.

(3) Est-ce que la matrice M est trigonalisable ? (Énoncer précisément le théorème que vous utilisez.)

(4) Déterminer le sous-espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2.

(5) La matrice M est-elle diagonalisable ? (Énoncer précisement le théorème que vous utilisez.)