Contrôle Continu 2 (novembre 2012)

Durée 1 heure

Il sera tenu compte dans le barème de la rédaction et du soin. La clareté du raisonnement et la concision des arguments seront également évaluées.

L'usage de la calculatrice et du téléphone portable est interdit.

Questions de cours.
Soit $f : U \to V$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels U et V de dimension finie.

(1) Donner la définition du noyau de f.

(2) Énoncer le théorème du rang appliqué à l'application linéaire f.

Exercice 1 (Application linéaire)**.**
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (-17x + 3y + 9z, -54x + 7y + 27z, -12x + 3y + 7z) \ .$$

(1) Écrire la matrice $M := Mat_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ de l'application linéaire f dans la base canonique

$$\mathcal{E} := \{\vec{e_1} := (1, 0, 0),\ \vec{e_2} := (0, 1, 0),\ \vec{e_3} := (0, 0, 1)\} \ .$$

(2) Calculer la trace $\operatorname{tr} f$ et le déterminant $\det f$ de l'endomorphisme f.

(3) L'application f est-elle injective (oui ou non) ? surjective (oui ou non) ? bijective (oui ou non) ? Justifiez bien votre réponse.

On considère la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} := \left\{\vec{b_1} := (1, 0, 2),\ \vec{b_2} := (0, -3, 1),\ \vec{b_3} := (1, 2, 1)\right\} \ .$$

(4) Calculer les images des vecteurs $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ et $\vec{b}_3$ par l'application f et en déduire la matrice $N := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B}$.

(5) Écrire la matrice de passage $P := Mat_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{id})$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{E}$.

(6) Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

(7) Que représente la matrice $P^{-1}MP$?

(8) Vérifier votre réponse de la question précédente par un calcul.

Exercice 2 (Diagonalisabilité)**.**
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 1, on considère l'application linéaire suivante

$$\begin{cases} f \ : \ \mathbb{R}_1[X] & \to \ \mathbb{R}_1[X] \\ \qquad P = aX + b & \mapsto \ (5a + b)X + b - 4a \ . \end{cases}$$

(1) Quelle propriété le polynôme $P := -X + 2$ vérifie-t-il par rapport à l'application f ? (Calculer son image par f.)

(2) Écrire la matrice $M := Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ de l'application linéaire f dans la base $\mathcal{B} := \{X, 1\}$.

(3) Calculer le polynôme caractéristique χ_f de l'endomorphisme f.

(4) Déterminer le spectre de f, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de f.

(5) Quelle est la dimension du sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3.

(6) Conclure de la question précédente que l'endomorphisme f est diagonalisable ou pas.