

EXAMEN FINAL (DÉCEMBRE 2011)

Questions de cours.

- (1) Donner la définition de forme quadratique.

Une forme quadratique est une application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$q(\vec{x}) = \Phi(\vec{x}, \vec{x}) .$$

- (2) Donner un exemple de forme quadratique.

L'application $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(x, y) := x^2 + y^2$ est une forme quadratique. (Elle provient, par exemple de la forme bilinéaire $\Phi((x, y)(x', y')) := xx' + yy'$).

Exercice 1 (*Espace euclidien*).

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels et de degrés inférieurs ou égaux à 3. On considère l'application

$$\left\{ \begin{array}{ll} \langle -, - \rangle : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto \langle P, Q \rangle := \int_0^1 xP(x)Q(x)dx . \end{array} \right.$$

- (1) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$? (Justifier votre réponse.)

L'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4. En effet, la dimension d'un espace vectoriel est définie par le nombre (constant) des éléments formant une base. Or, par exemple, la famille $\{1, X, X^2, X^3\}$, à 4 éléments, en forme une base.

- (2) Montrer qu'un polynôme P vérifie $\langle P, P \rangle = \int_0^1 xP(x)^2 dx = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul $P = 0$.

Si $P = 0$ est le polynôme nul, alors $\langle P, P \rangle = \int_0^1 xP(x)^2 dx = 0$. Dans l'autre sens, soit P un polynôme qui vérifie $\int_0^1 xP(x)^2 dx = 0$. Comme la fonction $xP(x)^2 \geq 0$ est positive ou nulle entre 0 et 1, on a que $P(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Ceci implique que le polynôme P a une infinité de racines, cas possible uniquement si P est le polynôme nul.

- (3) Montrer que l'application $\langle -, - \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

Il nous faut vérifier les quatres points suivants.

◇ Symétrie. On voit immédiatement que

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 xP(x)Q(x)dx = \int_0^1 xQ(x)P(x)dx = \langle Q, P \rangle .$$

◇ Bilinéaire. Montrons la linéarité à gauche :

$$\begin{aligned} \boxed{\langle \lambda P_1 + \mu P_2, Q \rangle} &= \int_0^1 x(\lambda P_1(x) + \mu P_2(x))Q(x)dx = \int_0^1 (\lambda xP_1(x)Q(x) + \mu xP_2(x)Q(x))dx \\ &= \lambda \int_0^1 xP_1(x)Q(x)dx + \mu \int_0^1 xP_2(x)Q(x)dx = \boxed{\lambda \langle P_1, Q \rangle + \mu \langle P_2, Q \rangle} . \end{aligned}$$

La linéarité à droite est une conséquence directe de la linéarité à gauche et de la symétrie.

◇ Définie. Il s'agit de montrer qu'un polynôme P vérifie $\langle P, P \rangle = \int_0^1 xP(x)^2 dx = 0$ si et seulement si P est le polynôme nul $P = 0$. Ceci a été montré à la question précédente.

◇ Positive. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on a

$$\langle P, P \rangle = \int_0^1 \underbrace{xP(x)^2}_{\geq 0} dx \geq 0 .$$

(4) Écrire la matrice $M := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle -, - \rangle)$ de la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle$ dans la base canonique

$$\mathcal{B} := \{1, X, X^2, X^3\}$$

de $\mathbb{R}_3[X]$.

Le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne de la matrice $M := \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\langle -, - \rangle)$ est égal à

$$\langle X^{i-1}, X^{j-1} \rangle = \int_0^1 x^{i+j-1} dx = \frac{1}{i+j} .$$

Au final, on trouve la matrice suivante

$$M := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} .$$

(5) La base canonique $\mathcal{B} := \{1, X, X^2, X^3\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est-elle orthonormée pour le produit scalaire $\langle -, - \rangle$?

La base $\mathcal{B}$ n'est ni orthogonale, par exemple $\langle 1, X \rangle = \frac{1}{3} \neq 0$, ni normée, par exemple $\langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{2} \neq 1$.

On considère le sous-espace vectoriel F engendré par les polynômes suivants

$$F := \text{Vect}(\{1, X\}) .$$

(6) Donner une base orthonormée de F pour le produit scalaire $\langle -, - \rangle$.

On applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Posons

$$P_1 := 1 \quad \text{et} \quad P_2 := X .$$

Comme la norme de P_1 est égale à

$$\|P_1\|^2 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} ,$$

on considère le polynôme de norme 1 :

$$\boxed{Q_1 := \sqrt{2}} .$$

Soit $F_1 := \text{Vect}(\{P_1\}) = \text{Vect}(\{Q_1\})$. On calcule

$$\text{proj}_{F_1}^\perp(P_2) = \frac{1}{\|P_1\|^2} \langle P_2, P_1 \rangle P_1 = 2 \times \frac{1}{3}$$

On a donc que $P_2 - \text{proj}_{F_1}^\perp(P_2) = X - \frac{2}{3}$ est orthogonal à F_1 . Sa norme vaut

$$\|X - \frac{2}{3}\|^2 = \int_0^1 x \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{9}x\right) dx = \frac{1}{6^2} .$$

Le second polynôme de cette base orthonormée est donc

$$\boxed{Q_2 := 6X - 4} .$$

- (7) Calculer la projection orthogonale $\text{proj}_F^\perp(X^2)$ de X^2 sur F .

Avec la base orthonormée $\{Q_1, Q_2\}$ trouvée à la question précédente, le calcul de la projection orthogonale de X^2 sur F s'effectue de la manière suivante

$$\begin{aligned}\boxed{\text{proj}_F^\perp(X^2)} &= \langle X^2, Q_1 \rangle Q_1 + \langle X^2, Q_2 \rangle Q_2 \\ &= 2 \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x^3(6x-4)dx \times (6X-4) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5}(6X-4) = \boxed{\frac{6}{5}X - \frac{3}{10}}.\end{aligned}$$

- (8) Donner une base orthogonale du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\{1, X, X^2\})$ engendré par les polynômes 1, X et X^2 .

D'après la question précédente, le polynôme

$$X^2 - \text{proj}_F^\perp(X^2) = X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{3}{10}$$

est orthogonal à F . Donc la famille

$$\boxed{\left\{ \sqrt{2}, 6X-4, X^2 - \frac{6}{5}X + \frac{3}{10} \right\}}$$

est une base orthogonale de $\text{Vect}(\{1, X, X^2\})$.

Exercice 2 (*Diagonalisation des matrices*).

On considère la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ suivante

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M .

Le polynôme caractéristique de la matrice M est égal à : $\boxed{\chi_M(X) = -(X-1)(X-3)^2}$.

- (2) Déterminer le spectre de M , c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres.

L'ensemble des racines du polynôme caractéristique correspond à l'ensemble des valeurs propres.

Le spectre de M est donc $\boxed{\text{Spec}(M) = \{1, 3\}}$.

- (3) Est-ce que la matrice M est trigonalisable? Énoncer précisément le théorème que vous utilisez.

Comme le polynôme caractéristique χ_M de la matrice M est scindé, alors la matrice M est trigonalisable.

- (4) Déterminer le rang de la matrice $M - 3I$.

Le rang de la matrice

$$M - 3I = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

est $\boxed{\text{rg}(M - 3I) = 1}$.

- (5) En conclure le dimension du sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3. Préciser le théorème que vous appliquez.

Le sous-espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 est égal au noyau de $M - 3I$:

$\boxed{E_3 = \ker(M - 3I)}$. Par le théorème du rang, on sait que la dimension du noyau de $M - 3I$ vaut

$$\boxed{\dim \ker(M - 3I) = 3 - \text{rg}(M - 3I) = 3 - 1 = 2}.$$

- (6) La matrice M est-elle diagonalisable ? Justifiez votre réponse.

Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si les dimensions des sous-espaces propres (non réduits au vecteur nul) sont égales à la multiplicité algébrique des valeurs propres dans le polynôme caractéristique. Ici la dimension de E_1 est 1 et la question précédente montre que la dimension de E_3 est 2. Donc la matrice M est diagonalisable.

- (7) Déterminer le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.

Le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par le vecteur

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ soit}$$

$$E_1 = \text{Vect}(\{\vec{u}_1\}).$$

- (8) On pose

$$\vec{u}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{B}' := \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ est une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leurs valeurs propres.

Un calcul immédiat montre que

$$M\vec{u}_1 = \vec{u}_1, \quad M\vec{u}_2 = 3\vec{u}_2, \quad M\vec{u}_3 = 3\vec{u}_3.$$

Comme ces trois vecteurs ne sont pas nuls, ce sont des vecteurs propres de M , de valeurs propres respectives 1, 3 et 3.

Comme les deux derniers vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants. D'après la question précédente, le vecteur $\vec{u}_1$ est un vecteur propre de valeur propre 1 et les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ sont des vecteurs propres de valeur propre 3. Finalement, comme l'union de familles libres de vecteurs propres associée à des valeurs propres distinctes est encore une famille libre, la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Le fait que $\mathcal{B}'$ possède 3 vecteurs implique qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$. (On peut aussi échelonner la matrice P).

- (9) Écrire la matrice de passage $P := \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{R}^3})$ de la base $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de passage P vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (10) Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P .

La matrice inverse de P vaut

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (11) Calculer le produit des matrices $P^{-1}MP$. Après avoir fait le calcul, justifier pourquoi votre résultat est juste.

Le calcul donne

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 7 & -2 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ce résultat est cohérent avec l'interprétation suivante. Le produit de matrices $P^{-1}MP$ représente l'endomorphisme $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X \mapsto MX$, dans la base $\mathcal{B}'$. Comme la base $\mathcal{B}'$ est une base de vecteurs propres de valeurs propres respectives 1, 3 et 3, le produit $P^{-1}MP$ est égal à la matrice diagonale

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (12) Calculer les puissances M^k de la matrice M , pour $k \geq 1$.

Posons $\Delta := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La question précédente montre que $P^{-1}MP = \Delta$, d'où $M = P\Delta P^{-1}$. Ceci implique que la matrice M^k est égale à

$$M^k = P\Delta^k P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 3^k & -2 + 2 \cdot 3^k & 1 - 3^k \\ 2 - 2 \cdot 3^k & -2 + 3 \cdot 3^k & 1 - 3^k \\ 2 - 2 \cdot 3^k & -2 + 2 \cdot 3^k & 1 \end{pmatrix}.$$