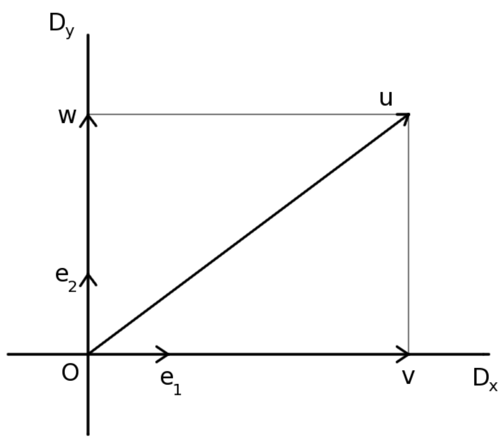
Notes de cours : **Projections**

⋄ Travaillons dans le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$, que l'on munit de la base canonique

$$\mathcal{B} := \{e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1)\} \ .$$

Tout vecteur u du plan s'écrit de manière unique dans la base $\mathcal{B}$. Dans l'exemple suivant, on prend

$$u = \underbrace{4.(1,0)}_{v} + \underbrace{3.(0,1)}_{w} = (4,3) \ .$$



Le vecteur v de coordonnées $(4,0)$ est le *projeté de u sur la droite des abscisses D_x parallèlement à la droite des ordonnées D_y* ; on le note

$$v = \boxed{\mathrm{proj}_{D_x}^{D_y}(u)} \ .$$

Le vecteur w de coordonnées $(0,3)$ est le *projeté de u sur la droite des ordonnées D_y parallèlement à la droite des ordonnées D_x* ; on le note

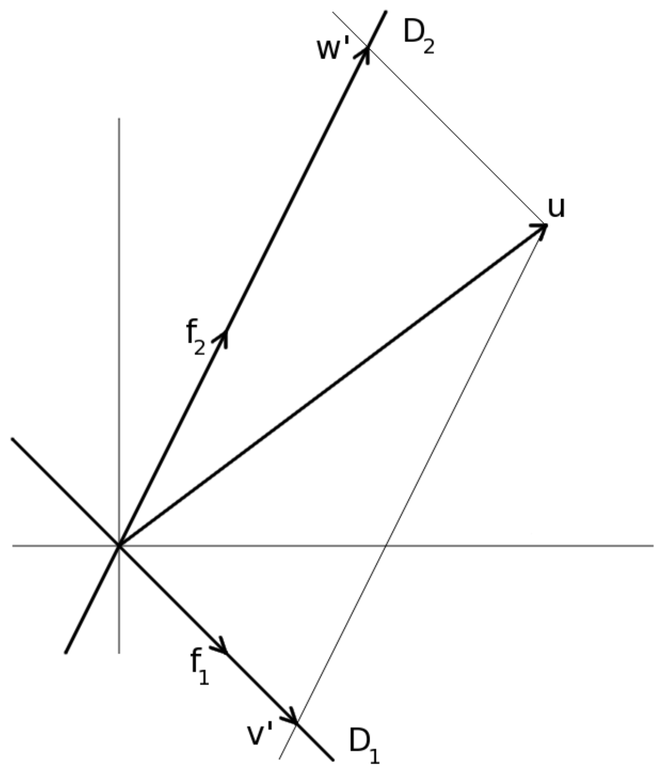
$$w = \boxed{\mathrm{proj}_{D_y}^{D_x}(u)} \ .$$

⋄ Considérons maintenant une autre base du plan $\mathbb{R}^2$, par exemple

$$\mathcal{B}' := \{f_1 = (1,-1),\ f_2 = (1,2)\} \ .$$

De la même manière, le vecteur u s'écrit de manière unique dans la base $\mathcal{B}'$:

$$u = \underbrace{a(1,-1)}_{v'} + \underbrace{b(1,2)}_{w'} \ .$$



On appelle D_1 et D_2 les deux droites engendrées respectivement par le vecteur f_1 et f_2.
Le vecteur v' est le *projeté de u sur la droite D_1 parallèlement à la droite D_2* :

$$v' = \boxed{\mathrm{proj}_{D_1}^{D_2}(u)} \; .$$

Le vecteur w' est le *projeté de u sur la droite D_2 parallèlement à la droite D_1* :

$$w' = \boxed{\mathrm{proj}_{D_2}^{D_1}(u)} \; .$$

Il reste maintenant à calculer les coordonnées de ces vecteurs. Pour ce faire, on résoud le système suivant

$$u = a(1,-1) + b(1,2) = (a,-a) + (b,2b) = (a+b, -a+2b) \; .$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a+b & = & 4 \\ -a+2b & = & 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -3a & = & -5 \\ 3b & = & 7 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{5}{3} \\ & & \\ b & = & \dfrac{7}{3} \end{array} \right.$$

Le projeté v' de u sur la droite D_1 parallèlement à la droite D_2 est donc

$$v' = \boxed{\mathrm{proj}_{D_1}^{D_2}(u) = \left(\frac{5}{3}, \frac{-5}{3}\right)} \; .$$

Et le projeté w' de u sur la droite D_2 parallèlement à la droite D_1 est donc

$$w' = \boxed{\mathrm{proj}_{D_2}^{D_1}(u) = \left(\frac{7}{3}, \frac{14}{3}\right)} \; .$$

$\diamond$ Une autre méthode consiste à écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$P = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{array} \right) \; .$$

On calcule ensuite l'inverse de cette matrice :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Enfin, les coordonnées du vecteur $u = (4, 3)$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont données par le produit suivant

$$[u]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[u]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} .$$

On en conclut que

$$\boxed{u = \underbrace{\frac{5}{3}f_1}_{v'} + \underbrace{\frac{7}{3}f_2}_{w'}} .$$

$\diamond$ Pour un exemple en dimension 3 de projection sur un plan parallèlement à une droite et, respectivement sur une droite parallèlement à un plan, on réfère à l'exercice 3 de la feuille 5. La méthode détaillée ici s'applique à la résolution de cet exercice.