FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 12

FORMES QUADRATIQUES

Exercice* 1 (*Algorithme d'othonormalisation de Gram-Schmidt*).[1]
Soit $\mathcal{B} := \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ une base d'un espace euclidien $(E, \langle \text{-}, \text{-} \rangle)$. (On pourra travailler dans $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, par exemple). Soit $\mathcal{F} := \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_n}\}$ la base obtenue après application de l'algorithme d'othonormalisation de Gram-Schmidt.

(1) Quelle propriété particulière possède la matrice de changement de bases $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{F}}(\mathrm{id})$?

Exercice 2 (*Changement de base*).
On considère l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x, y, z) := x^2 + 6y^2 + 56z^2 - 4xy + 14xz - 36yz \ .$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une forme quadratique.

(2) Donner la forme polaire de q.

(3) Décrire la matrice $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ de q dans la base canonique $\mathcal{B} := \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(4) Donner la signature de q.

(5) Décrire la matrice $N := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q)$ de q dans la base

$$\mathcal{B}' := \{\vec{e_1}, 2\vec{e_1} + \vec{e_2}, -3\vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}\} \ .$$

(6) Retrouver la signature de q.

(7) Existe-il des vecteurs $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(X) = 0$?

Exercice 3 (*Méthode de Gauss*).
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la forme quadratique

$$q(x, y, z, t) := x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy + 4xz + 16yz + 4yt + 8zt \ .$$

(1) Donner la forme polaire de q.

(2) Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

(3) Appliquer la méthode de Gauss à q.

(4) Quelle est la signature de q ?

(5) Peut-on retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Sylvester ?

1. Les exercices notés avec une étoile * ne seront pas corrigés en priorité (par manque de temps).

Exercice* 4 (*Formes linéaires indépendantes*)**.**
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la forme quadratique

$$q(x, y, z) := (x-y)^2 + (y-z)^2 - (z-x)^2 \ .$$

(1) Cette forme est-elle celle obtenue par la méthode de Gauss ?

(2) Dans le cas contraire, réduire la forme quadratique q avec la méthode de Gauss.

Exercice 5 (*Réduction*)**.**
On considère la forme quadratique suivante de $\mathbb{R}^3$

$$q(x, y, z) := x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz \ .$$

(1) Réduire la forme quadratique q en utilisant la méthode de Gauss.

(2) En déduire la base dans laquelle q a la forme donnée par cette méthode.

(3) Réduire la forme quadratique q en utilisant la diagonalisation des matrices.

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).

Page web du cours : `http://math.unice.fr/~brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`