

CORRECTION DE LA FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

Exercice 9 (Dérivés de polynômes).

On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit

$$V := \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid (X+1)P' - (2-X^2)P'' = 0\}.$$

(1) Montrer que l'ensemble V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

On applique la proposition du cours de la manière suivante.

- L'ensemble V n'est pas vide : par exemple, le polynôme nul $P = 0$, appartient à V .
- L'ensemble V est stable pour la somme : soient $P, Q \in V$, montrons que $P + Q \in V$. Comme $P, Q \in V$, on a

$$(X+1)P' - (2-X^2)P'' = 0 \quad \text{et} \quad (X+1)Q' - (2-X^2)Q'' = 0.$$

D'où

$$\begin{aligned} (X+1)(P+Q)' - (2-X^2)(P+Q)'' &= \\ (X+1)(P' + Q') - (2-X^2)(P'' + Q'') &= \\ (X+1)P' - (2-X^2)P'' + (X+1)Q' - (2-X^2)Q'' &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement $P + Q \in V$.

- L'ensemble V est stable pour la multiplication par les scalaires : soient $P \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\lambda P \in V$. Comme $P \in V$, on a $(X+1)P' - (2-X^2)P'' = 0$. D'où

$$\begin{aligned} (X+1)(\lambda P)' - (2-X^2)(\lambda P)'' &= \\ (X+1)\lambda P' - (2-X^2)\lambda P'' &= \\ \lambda((X+1)P' - (2-X^2)P'') &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement $\lambda P \in V$.

(2) En donner une famille génératrice.

Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Ce polynôme appartient à V si et seulement si

$$\begin{aligned} (X+1)P' - (2-X^2)P'' &= \\ (X+1)(a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2) - (2-X^2)(2a_2 + 6a_3X) &= \\ a_1 - 4a_2 + (a_1 + 2a_2 - 12a_3)X + (4a_2 + 3a_3)X^2 + 9a_3X^3 &= 0. \end{aligned}$$

Par identification, ceci est équivalent au système linéaire suivant

$$\begin{cases} a_1 - 4a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 - 12a_3 &= 0 \\ 4a_2 + 3a_3 &= 0 \\ 9a_3 &= 0 \end{cases}$$

qui admet pour solution $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Le sous-espace vectoriel V est donc égal au sous-espace vectoriel formé des polynômes constants : $V = \{a_0 \in \mathbb{R}_3[X] \mid a_0 \in \mathbb{R}\}$. Par exemple, $\{1\}$ en est une famille génératrice. (C'est même une base.)