FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

ESPACES VECTORIELS ET COMBINAISONS LINÉAIRES

Exercice 1 ($\mathbb{Q}$ vs $\mathbb{R}$)**.**
On considère l'addition et la multiplication usuelles sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

(1) Est-ce que $\mathbb{Q}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

(2) Est-ce que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$?

Exercice 2 ($\mathbb{R}^2$)**.**

(1) À quelle condition une droite du plan ($\mathbb{R}^2$) est-elle un sous-espace vectoriel ?

(2) L'union de deux droites distinctes passant par 0 forme-t-elle un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

(3) Quels sont tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Exercice* 3 ($\mathbb{R}^3$)**.** [1]

(1) Quels sont tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'union $F \cup G$ de F et G soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice* 4 (Applications vers un espace vectoriel)**.**
Soit A un ensemble et soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Montrer que l'ensemble E^A des applications de A vers E, muni des opérations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f+g & : & A \to E \\ & & x \mapsto f(x)+g(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda.f & : & A \to E \\ & & x \mapsto \lambda.f(x) \end{array} \right.$$

forme un espace vectoriel.

Exercice 5 (Sous-espaces vectoriels d'applications)**.**

(1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, cf. exercice précédent.

(2) Montrer, de deux manières différentes, que l'ensemble

$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$$

des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 1 est un espace vectoriel pour les opérations usuelles.

(3) L'ensemble des fonctions réelles, c'est-à-dire de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, paires est-il un espace vectoriel pour les opérations usuelles ?

---

1. Les exercices notés avec une étoile * ne seront pas corrigés en priorité (par manque de temps).

Exercice 6 (Système linéaire I)**.**
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système $x-y+z=0$:

$$\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y+z=0\} \ .$$

(1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) En donner plusieurs familles génératrices.

Exercice* 7 (Système linéaire II)**.**
Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x+2y=0, \\ 2y+z=0 \end{cases}$

$$\mathcal{S} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y=0 \text{ et } 2y+z=0\} \ .$$

(1) Montrer, de deux manières différentes, que l'ensemble $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2) En donner une famille génératrice.

Exercice 8 (Combinaisons linéaires)**.**
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 := (1,2,3,0), \quad v_2 := (0,1,2,3), \quad \text{et} \quad v_3 := (2,3,4,-3)$$

ainsi que les familles

$$F_1 := \{v_1\}, \quad F_2 := \{v_1, v_2\}, \quad \text{et} \quad F_3 := \{v_1, v_2, v_3\} \ .$$

On considére les vecteurs suivants

$$w_1 := (1,1,1,1), \quad w_2 := (1,-1,1,-1), \quad w_1 := (-3,-4,-5,6) \ .$$

(1) Est-ce que le vecteur w_1 (respectivement w_2 et w_3) est une combinaison linéaire de F_1, F_2 ou F_3 ?

(2) Déterminer les sous-espaces vectoriels $Vect(F_1)$, $Vect(F_2)$ et $Vect(F_3)$.

(3) Déterminer toutes les manières d'écrire les vecteurs $(1,3,5,3)$ et $(0,0,0,0)$ comme combinaisons linéaires de F_3.

Exercice 9 (Dérivés de polynômes)**.**
On note $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit

$$V := \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid (X+1)P' - (2-X^2)P'' = 0\} \ .$$

(1) Montrer que l'ensemble V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

(2) En donner une famille génératrice.

Exercice* 10 (Familles génératices de polynômes)**.**
Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Donner plusieurs familles génératrices de $\mathbb{R}_n[X]$.

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).
Page web du cours : `http ://math.unice.fr/~brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`