FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 4

FAMILLES LIBRES ET BASES

Exercice 1 (Polynômes I)**.**
On considère la famille suivante de polyômes :

$$F := \{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\} \ .$$

(1) Montrer que F est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, en démontrant que tout polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de F.

(2) Donner les coordonnées de P dans cette base.

Exercice 2 (Bases)**.**
Reprendre les exercices 6, 7 et 9 de la feuille de TD 3 et répondre à la question supplémentaire suivante :

(3) Donner une base de ce sous-espace vectoriel.

Exercice 3 ($\mathbb{R}^6$)**.**
On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^6$:

$$v_1 := (1, 2, -3, 4, 0, 1), \quad v_2 := (1, 3, -4, 6, 5, 4) \quad \text{et} \quad v_3 := (3, 8, -11, 16, 10, 9) \ .$$

(1) Ces vecteurs sont-ils libres ?

(2) Quelle est la dimension de $Vect(\{v_1, v_2, v_3\})$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$ engendré par v_1, v_2 et v_3 ?

(3) Donner trois bases différentes de $Vect(\{v_1, v_2, v_3\})$.

(4) Donner une combinaison linéaire non triviale vérifiée par v_1, v_2 et v_3.

Exercice* 4 ($\mathbb{R}^4$)**.** [1]
On considère la famille suivante de vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$A := \{(1, 2, 3, 1), (2, 1, 3, 1), (1, 1, 2, 3), (1, 1, 3, 2), (3, 2, 5, 4)\} \ .$$

(1) Cette famille est-elle libre ?

(2) Quelle est la dimension de $Vect(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par A ?

(3) Donner deux bases différentes de $Vect(A)$.

(4) Donner une combinaison linéaire non triviale d'éléments de A.

1. Les exercices notés avec une étoile * ne seront pas corrigés en priorité (par manque de temps).

Exercice 5 (Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$)**.**
On appelle U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants :

$$u_1 := (1, 2, -1, 3), \quad u_2 := (2, 4, 1, -2) \quad \text{et} \quad u_3 := (3, 6, 3, -7) \ .$$

On appelle W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs suivants :

$$w_1 := (1, 2, -4, 11) \quad \text{et} \quad w_2 := (2, 4, -5, 14) \ .$$

(1) Quelle est la dimension de W ?

(2) Montrer que $U = W$.

(3) En donner deux bases différentes.

Exercice 6 (Polynômes II)**.**
On considère la famille suivante de polynômes

$$F := \{1 + X + X^2 + X^3, 1 - X - X^3, 1 - X^2 - X^3, 3 - X^3\}$$

(1) Cette famille est-elle génératrice dans l'espace-vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 ?

(2) Cette famille est-elle libre dans $\mathbb{R}_3[X]$?

(3) Cette famille est-elle libre dans $\mathbb{R}[X]$?

(4) Donner deux bases du sous-espace $Vect(F)$ engendré par la famille F.

(5) Compléter ces bases de $Vect(F)$ en des bases de $\mathbb{R}_3[X]$.

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).

Page web du cours : `http ://math.unice.fr/~brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`