FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 8

DIAGONALISATION ET TRIGONALISATION

Exercice 1 (Diagonalisation à valeurs propres simples)**.**
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans une base $\mathcal{B}$ est la suivante

$$M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Quel est le rang de f ?

(2) En déduire, sans calcul, que 0 est valeur propre de M.

(3) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ de f.

(4) En déduire, sans plus de calcul, mais en justifiant, que f est diagonalisable.

(5) Montrer, sans diagonaliser complètement M, que $\mathrm{tr}(M^n) = 1 + 2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

(6) Diagonaliser la matrice M.

Exercice 2 (Diagonalisation à valeurs propres avec multiplicité)**.**
On note $\mathcal{B} := \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la suivante

$$M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Quel est le rang de f ?

(2) En déduire que $\mathcal{F} := \{f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}), f(\vec{e_3})\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que 0 n'est pas valeur propre de M.

(3) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ de f.

(4) Quelle sont les dimensions des sous-espaces propres E_2 et E_4 associés aux valeurs propres 2 et 4 ? Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f.

(5) Trouver une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ telles que $M = P^{-1}\Delta P$.

(6) Calculer les puissances M^k, pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 (Diagonalisabilité)**.**
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}$ est la suivante

$$M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) := \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ -6 & -2 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique $\chi_f(X)$ de f.

(2) Quelle sont les dimensions des sous-espaces propres E_1 et E_2 associés aux valeurs propres 1 et 2 ?

(3) La matrice M est-elle diagonalisable ?

(4) La matrice M est-elle trigonalisable ?

(5) Donner une base dans laquelle l'endomorphisme f soit représenté par une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 4 (Trigonalisation)**.**
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base canonique $\mathcal{B}$ est la suivante

$$M = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} .$$

(1) L'endomorphisme f est-il trigonalisable sur $\mathbb{R}$?

(2) Quelle est la dimension du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 ?

(3) L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

(4) Donner une base dans laquelle l'endomorphisme f soit représenté par une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 5 (Puissance de matrice)**.**
On considère la matrice suivante

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

(1) Calculer les puissances M^k, pour $k \in \mathbb{N}$, en diagonalisant la matrice M.

(2) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton et la division euclidienne des polynômes.

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).
Page web du cours : `http ://math.unice.fr/~brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`