FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 9

FORMES BILINÉAIRES ET PRODUITS SCALAIRES

Exercice 1 (Formes bilinéaires de $\mathbb{R}^n$)**.**
On considère les applications suivantes

$$\begin{cases} \Phi_1 : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \pi.xy\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_2 : & \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \mapsto & \pi.x_1y_1+2.x_1y_2-x_2y_1+3.x_2y_2\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_3 : & \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) & \mapsto & 2x_1y_1+x_2y_2+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_3+x_3y_2+2x_3y_3\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_4 : & \mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & \big((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\big) & \mapsto & x_1y_3+2.x_1y_1-x_2y_1-2.x_1y_3+7x_1y_4\ . \end{cases}$$

(1) Montrer qu'il s'agit de formes bilinéaires.

(2) Pour chacune d'entre elles, donner la matrice associée dans la base canonique.

(3) Déterminer si elles sont dégénérées.

(4) Déterminer si elles sont symétriques.

(5) Pour celles qui sont symétiques, déterminer si elles sont définies positives.

(6) Pour chacune d'entre elles, donner la matrice représentative dans les bases respectives suivantes

$$\{2\},\ \{(1,1),\ (1,2)\},\ \{(1,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\},\ \{(1,0,1,0),\ (0,1,0,1),\ (1,1,1,0)\ (0,1,1,1)\}\ .$$

Exercice 2 (Produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$)**.**
On travaille dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ formé des matrices de taille 2×2. On considère l'application

$$\begin{cases} \langle\text{-},\text{-}\rangle : & M_2(\mathbb{R})\times M_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & (A,B) & \mapsto & \langle A,B\rangle := \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)\ . \end{cases}$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une forme bilinéaire.

(2) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $M_2(\mathbb{R})$.

(3) Décrire la norme associée à $\langle\text{-},\text{-}\rangle$.

Exercice 3 (Produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1])$)**.**
On travaille dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1])$ formé des applications continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de l'intervalle $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. On considère l'application

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \Phi : & \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 (1+t)f(t)g(t)dt \ . \end{array} \right.$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une forme bilinéaire.

(2) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1])$.

Contact : Bruno Vallette (`brunov@unice.fr`) et Brahim Benzeghli (`bbrahim@unice.fr`).

Page web du cours : `http ://math.unice.fr/∼brunov/Cours-Maths-L2MASS-2012-2013.html`