Licence de Sciences Économiques — Année 2006-2007
Université de Nice Sophia-Antipolis — Mathématiques L1

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

Exercice 1.

(1) Tracer dans le plan $\mathbb{R}^2$ la droite d'équation $x_2 = 2x_1 + 1$.

(2) Représenter les points A et B de coordonnées respectives $(1, 2)$ et $(5, 0)$. Donner l'équation de la droite passant par ces deux points.

Exercice 2.

(1) On considère l'ensemble $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 > 0\}$. Représenter graphiquement cet ensemble. Cet ensemble est-il un ouvert ? Décrire la frontière $\mathrm{Fr}\, A$ de l'ensemble A. L'ensemble A est-il un fermé ? Que vaut le complémentaire A^c ?

(2) On considère l'ensemble $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 \leq 0\}$. Est-il un fermé de $\mathbb{R}^2$? Est-il un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

(3) On pose $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 = 0\}$. Est-il fermé ? Décrire la frontière $\mathrm{Fr}\, C$ de l'ensemble C. Est-il ouvert ?

(4) Soit D l'ensemble défini par $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 \geq 0, x_2 > 0\}$. Représenter graphiquement cet ensemble. Cette ensemble est-il ouvert ? Est-il fermé ?

(5) Quelle figure décrit l'ensemble E défini par $E := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1^2 + x_2^2 = 9\}$? Représenter cet ensemble. Décrire la frontière $\mathrm{Fr}\, E$ de l'ensemble E. Cet ensemble est-il fermé ? Si oui, le démontrer. Est-il ouvert ? Est-il borné ?

(6) Donner un exemple d'ensemble qui n'est pas borné ?

Exercice 3. On considère les ensembles $A_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 > 0\}$ et $A_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_2 > 0\}$.

(1) Représenter graphiquement les ensembles A_1 et A_2 ainsi que leur intersection $A_1 \cap A_2$ et leur union $A_1 \cup A_2$. Donner la définition de $A_1 \cap A_2$ et de $A_1 \cup A_2$ (sous la même que nous avons défini A_1 et A_2). Décrire le complémentaire de $A_1 \cap A_2$.

(2) Montrer que $A_1 \cap A_2$ est ouvert.

(3) On considère $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 \geq 0 \text{ ou } x_2 \geq 0\}$. Montrer que B est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. On pose $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 5$ et $g(x_1, x_2) := x_1x_2 - 5$.

(1) De quel type sont ces deux fonctions ?

(2) Que vaut la fonction $f + g$? Calculer $f(0, 0)$, $f(1, -1)$?

Exercice 5. On pose

$$\left\{ f \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{4x_1 + 7x_2}{x_1 + 3x_2 - 5}. \right.$$

(1) La fonction f est une fonction de quel type ?

(2) Quel est le domaine de définition de f ? Représenter graphiquement ce domaine. S'agit-il d'un ouvert ? S'agit-il d'un fermé ? Est-il borné ?

Exercice 6. On pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f & : & (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_2}{x_2 - x_1^2}, \\ \\ g & : & (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_2}{x_1}. \end{array} \right.$$

(1) De quel type sont ces deux fonctions ?

(2) Donner les domaines de définition de f et de g. Sont-il des ouverts ? Sont-ils fermés ? Sont-ils bornés ?
(3) Calculer la somme des fractions rationnelles $f + g$ et le quotient $\frac{f}{g}$.

Exercice 7. On considère la fonction

$$h : (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + 5x_2^2}{4 - x_1^2 - x_2^2}.$$

(1) Quel est le domaine de définition de h ? À quoi correspond ce domaine géométriquement ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-il borné ?

On considère la fonction

$$k : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{h(x_1, x_2)}.$$

(2) Quelle est le domaine de définition de k ? À quoi correspond ce domaine géométriquement ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-il borné ?

Exercice 8. Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2 + y^2}. \end{array}$$

Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-il borné ?