

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

Exercice 1.

Préciser le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \frac{5}{x^5} - \frac{1}{x^7}$ 2. $x \mapsto \frac{2x+3}{x+2}$ 3. $x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

4. $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ 5. $x \mapsto \cos(\cos x)$ 6. $x \mapsto \sin(\sqrt{3x+1})$

7. $x \mapsto e^{2x^2+1}$ 8. $x \mapsto \ln \frac{1}{3x-1}$ 9. $x \mapsto 3^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2.

Calculer la dérivée de $\ln\left(\sqrt{3 + \frac{2}{x}}\right)$.

Conseil: Vous pouvez poser la fonction $u(x) := \sqrt{3 + \frac{2}{x}}$, la dériver puis finir le calcul demandé.

Exercice 3.

On considère la fonction

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & 5x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 14x_2 - 1 \end{cases}$$

- (1) Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
- (2) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
- (3) Déterminer les éventuels points critiques de la fonction f .

Exercice 4.

- (1) On considère la fonction

$$\begin{cases} f: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & 3x_1^2 + \frac{2}{x_2} - x_1x_2 + 7 \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

Pourquoi les dérivées partielles de f sont-elles définies sur tout le domaine de définition de f ?

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f . Que remarquez-vous entre $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$? Énoncer le théorème du cours qui correspond à ce résultat.

- (2) Répondre aux mêmes questions avec les fonctions des exercices 4, 5, 6, 7 et 8 de la feuille de Travaux Dirigés 2.

Exercice 5.

- (1) Pour les fonctions suivantes, préciser leur domaine de définition, leur domaine de dérivabilité et calculer leurs dérivées partielles.

1. $(x, y) \mapsto \ln(1+x) + 2 \ln(1+y)$ 2. $(x, y) \mapsto 10x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}$ 3. $(x, y) \mapsto (3x+2y)^{\frac{1}{2}}$

4. $(x, y) \mapsto \sqrt{xy}$ 5. $(x, y) \mapsto \sqrt{2x^2 + 3y^2}$ 6. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{1}{2}}$

- (2) Pour les fonctions des exemples 2, 3, 4, 5 et 6 trouver le nombre α tel que $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.
Vérifier que dans tous les cas, on a $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$, pour $\lambda > 0$. À quel théorème du cours correspond ce résultat?