Licence de Sciences Économiques — Année 2005-2006
Université de Nice Sophia-Antipolis — Mathématiques L1

# FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

**Exercice 1.** Calculer dans $\mathbb{R}^2$ :
- (1, 2)+(5, 0)
- (-3).(1, 2)
- (1, 2)-(5, 0)

Quelle est la distance de (1, 2) à (5, 0) ?
Soit $A$ le point de coordonnées (1, 2) dans le plan et $B$ le point de coordonnées (5, 0).
À quoi correspondent les points de coordonnées $(1, 2) + (5, 0)$, $(-3).(1, 2)$ et $(1, 2) - (5, 0)$ ?

**Exercice 2.** On pose $f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 5$ et $g(x_1, x_2) := x_1x_2 - 5$.
Que vaut la fonction $f + g$ ?
Calculer $f(0, 0)$, $f(1, -1)$ ?

**Exercice 3.** On pose

$$\begin{cases} f \;:\; (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_2}{x_2 - x_1^2}, \\ g \;:\; (x_1, x_2) \mapsto \dfrac{x_2}{x_1}. \end{cases}$$

Donner les domaines de définition de $f$ et de $g$. Calculer la somme des fractions rationnelles $f + g$ et le quotient $\frac{f}{g}$.

**Exercice 4.** On considère l'ensemble $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1 > 0\}$.
Dessiner $A$. Cet ensemble est-il un ouvert ? Cet ensemble est-il un fermé ?
On considère l'ensemble $B := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1 \leq 0\}$. Est-il un fermé de $\mathbb{R}^2$ ? Est-il un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ?
On pose $C := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1 = 0\}$. Est-il fermé ? Est-il ouvert ?
L'ensemble $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1^2 + x_2^2 = 9\}$ est-il fermé ? Est-il ouvert ? Est-il borné ?
Donner un exemple d'ensemble qui n'est pas borné ?

**Exercice 5.** On considère l'ensemble $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}$.
Dessiner $A$. Montrer que $A$ est ouvert. Quel est le complémentaire de $A$ ?
On considère $F = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$. Montrer que $F$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 6.** On pose

$$\left\{ f \;:\; (x_1, x_2) \mapsto \frac{4x_1 + 7x_2}{x_1 + 3x_2 - 5}. \right.$$

Quel est le domaine de définition de $f$ ? Représenter graphiquement ce domaine. S'agit-il d'un ouvert ? S'agit-il d'un fermé ?

**Exercice 7.** On considère la fonction

$$h \,:\, (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + 5x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 - 4}.$$

Quel est le domaine de définition de $h$ ? À quoi correspond ce domaine géométriquement ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?
On considère la fonction

$$k \,:\, (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{h(x_1, x_2)}.$$

Quelle est le domaine de définition de $k$ ? À quoi correspond ce domaine géométriquement ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?

**Exercice 8.** Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\, y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2}. \end{array}$$

Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$ ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ?