Licence de Sciences Économiques, mathématiques L 1 - U 3, septembre 2005

CALCULATRICES ET DOCUMENTS SONT INTERDITS

Exercice 1 : Montrer que l'application :

$$h : \mathbf{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbf{R} - \{3\} \quad , \quad x \longmapsto h(x) = 3 + \frac{6}{x+2}$$

est bijective. Déterminer la fonction réciproque h^{-1}.

Exercice 2 : On considère l'application :

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1,x_2) \longmapsto f(x_1,x_2) = 4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 + 17 \quad .$$

1) Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre deux. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.

2) Trouver les points critiques de f (c'est-à-dire les points où les dérivées partielles d'ordre un s'annulent). Rappeler la condition suffisante donnée dans le cours pour qu'une fonction numérique de deux variables admettant des dérivées partielles d'ordre 2 continues possède en un point critique un extremum local. Cette condidtion est-elle satisfaite ici par f ?

3) Montrer que pour tout $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (2x_1 + 3x_2)^2 + 17$.

4) En déduire la nature de l'ensemble des $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x_1,x_2) = 17$. Puis, en fonction d'un réel k, la nature l'ensembles E_k des $(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x_1,x_2) = k$. Représenter E_{18}. Enfin déduire également de cette question 3 que la fonction f admet un minimum que l'on déterminera. On précisera en quels points ce minimum est atteint.

Exercice 3 : On considère la fonction :

$$h : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad (x_1,x_2) \longmapsto h(x_1,x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2} \quad .$$

1) Préciser et représenter $\mathcal{D}_h$ le domaine de définition de h. On restreindra dans la suite la fonction h à son domaine de définition. Montrer que h est homogène et préciser son degré d'homogénéité.

2) Calculer les dérivées partielles d'ordre un de h.

3) Ecrire l'identité d'Euler que vérifie h et retrouver cette identité par un calcul direct.

Exercice 4 : 1) Soit U le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (x_1,x_2) de réels tels que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$. Représenter U. Justifier (éventuellement par un dessin) que U est un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

On considère l'application : $f : U \longrightarrow \mathbf{R} \quad : \quad (x_1,x_2) \longmapsto \ln x_1 + \ln x_2 \quad .$

2) Déterminer les dérivées partielles d'ordre un de l'application f. Montrer que f ne possèdent pas de points critiques ? L'application f peut-elle avoir un extremum local ?

3) Soit H le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ formé des couples (x_1,x_2) de réels tels que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ et $2x_1 + 3x_2 = 1$. Représenter H. Montrer que H est un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}^2$.

On considère l'application :

$$g : U\times\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \quad : \quad (x_1,x_2,\lambda) \longmapsto g(x_1,x_2,\lambda) = \ln x_1 + \ln x_2 + \lambda(2x_1 + 3x_2 - 1) \quad .$$

4) Déterminer les dérivées partielles d'ordre un de l'application g. Quelles sont les points critiques de g ?

5) On suppose que la restriction de l'application f à H a un maximum. Déterminer ce maximum à l'aide de la question 4 et préciser les points de H où ce maximum est atteint.

6) Donner le tableau de variation de l'application u :

$$]0,\frac{1}{2}[\longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad x_1 \longmapsto u(x_1) = \ln x_1 + \ln (1 - 2x_1) - \ln 3 \quad .$$

Quel est son maximum ? Retrouver le résultat de la question 5, en se ramenant à l'étude d'une fonction numérique d'une seule variable.