Licence de Sciences Économiques | Année 2007-2008
Université de Nice Sophia-Antipolis | Mathématiques L1

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 1

Exercice 1. Nous allons modéliser par une fonction les chaînes de télévision que j'ai regardées pendant la semaine du 18 au 24 septembre. Chaque soir, j'ai regardé un film ou une émission proposé par une de ces chaînes. Appelons les chaînes 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Les 18, 20, 21 j'ai regardé la première chaîne. Les 19 et 22, j'ai regardé la deuxième chaîne. Le 23 j'ai suivi le programme de la cinquième chaîne et le 24 celui de la sixième.

Posons f la fonction de l'ensemble $\{18, 19, \ldots, 24\}$ à $\{1, 2, \ldots, 6\}$ qui associe à un jour la chaîne regardée.

(1) Représenter cette fonction (avec des ensembles et des flèches).
(2) Quelle est l'image $\mathrm{Im} f$ de f ? À quoi correspond cet ensemble en termes de chaîne de télévision ?
(3) Décrire les ensembles d'antécédents $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(2)$ et $f^{-1}(4)$ de 1, 2 et 4. À quoi correspondent ces ensembles dans la réalité ?
(4) Cette fonction est-elle surjective et qu'est-ce-que cela signifie-t-il ici ? Est-il possible, en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, d'avoir une fonction surjective ?
(5) Cette fonction est-elle injective et qu'est-ce-que cela signifie-t-il ici ? Est-il possible, en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, d'avoir une fonction injective ?
(6) Cette fonction est-elle bijective ? Est-il possible, en faisant un autre choix de chaînes chaque jour, d'avoir une fonction bijective ?

Exercice 2.

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) := (x+1)(x+2)$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(x) := \sqrt{x}$.

Quel est le domaine de définition de f et de g ? Décrire la composée $g \circ f$, sans oublier son domaine de définition.

Exercice 3.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) := 5x + 17$.

(1) Repésenter graphiquement cette fonction.
(2) Fixons un $y \in \mathbb{R}$, on considère l'équation $f(x) = 5x + 17 = y$ où x est l'inconnue. Posons $\mathcal{S}_y = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x + 17 = y\}$ l'ensemble des solutions de cette équation. Déterminer $\mathcal{S}_2$ puis $\mathcal{S}_y$.
(3) Montrer que f est bijective en utilisant deux méthodes différentes (celle que vous avez apprise les années passées et en appliquant directement la définition du cours).
(4) Déterminer la réciproque f^{-1}. Vérifier par le calcul que $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}}$ et que $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$.

Exercice 4.

On rappelle que la fonction *valeur absolue* $|\ |$ est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } x \geqslant 0, \text{ on pose } |x| := x, \\ \text{pour } x \leqslant 0, \text{ on pose } |x| := -x. \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement la fonction valeur absolue $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|. \end{cases}$

(2) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, déterminer le nombre d'antécédents de y par la fonction valeur absolue. Distinguer 3 cas, les représenter sur le graphe de la question précédente. Cette fonction est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

(3) On restreint l'ensemble d'arrivée à $\mathbb{R}^+$ et on considère la fonction f définie par $\begin{cases} f : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto |x|. \end{cases}$
Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, déterminer le nombre d'antécédents de y par la fonction f. (Distinguer plusieurs cas.) La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

(4) On restreint l'ensemble de départ à $\mathbb{R}^+$ et on considère la fonction g définie par $\begin{cases} g : & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto |x|. \end{cases}$
Pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, combien y-a-t-il d'antécédents de y par la fonction g. La fonction g est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ? À quelle fonction usuelle est égale la fonction g ?

Exercice 5. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) := (x+2)^2 - 3$

(1) Soit $y \in \mathbb{R}$, on considère l'équation $g(x) = y$ dont l'inconnue est x. En fonction des valeurs de y, déterminer le nombre des solutions de cette équation.

(2) Représenter graphiquement cette fonction et retrouver le résultat précédent.

(3) Cette fonction est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

(4) Soit $\bar{g} : [-2, +\infty[\to \mathbb{R}$ la restriction de g à l'ensemble $[-2, +\infty[$. Quelle est l'image $\mathrm{Im}\bar{g}$ de $\bar{g}$? En déduire que la fonction $\tilde{g} : [-2, +\infty[\to [-3, +\infty[$ définie par $\tilde{g}(x) = g(x)$, pour $x \in [-2, +\infty[$, est bijective. Déterminer sa réciproque $\tilde{g}^{-1}$.

Exercice 6.

On considère la fonction f définie par $\begin{cases} f : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{x+2}{x+1}. \end{cases}$

(1) Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que 1 est la seule valeur de $\mathbb{R}$ non atteinte par f.

(2) Soit $\bar{f}$ la restriction de f suivante $\begin{cases} \bar{f} : & \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{1\} \\ & x \mapsto \frac{x+2}{x+1}. \end{cases}$ Montrer que $\bar{f}$ est bien définie, bijective et calculer sa réciproque.

Cours : Philipe Maisonobe (`phm@math.unice.fr`), **TDs** : Stéphane Chau (`Stephane.Chau@unice.fr`) et Bruno Vallette (`brunov@math.unice.fr`)

Page web du cours : `http://math.unice.fr/∼brunov/Cours-Sciences-Eco.html`

(Pour la retrouver rapidement : Taper "Bruno Vallette" sur Google. Cliquer sur le premier lien proposé. Le lien vers le site du cours se trouve en bas de l'écran.)