Licence de Sciences Économiques
Université de Nice Sophia-Antipolis

Année 2007-2008
Mathématiques L1

CORRIGÉ DE LA FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

Exercice 4. On pose

$$\left\{ f \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{4x_1 + 7x_2}{x_1 + 3x_2 - 5}. \right.$$

(1) La fonction f est une fonction de quel type ?

La fonction f est une fonction polynomiale.

(2) Quel est le domaine de définition de f ? Représenter graphiquement ce domaine. S'agit-il d'un ouvert ? S'agit-il d'un fermé ? Est-il borné ?

Le domaine de défintion de f est donné par l'ensemble suivant :

$$D_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \, ; \, x_1 + 3x_2 - 5 \neq 0\}.$$

Il est représenté sur la figure 1 (il s'agit de tout le plan auquel on a retiré la droite en pointillés rouges d'équation $x_1 + 3x_2 - 5 = 0$). Comme l'ensemble D_f est l'union de deux

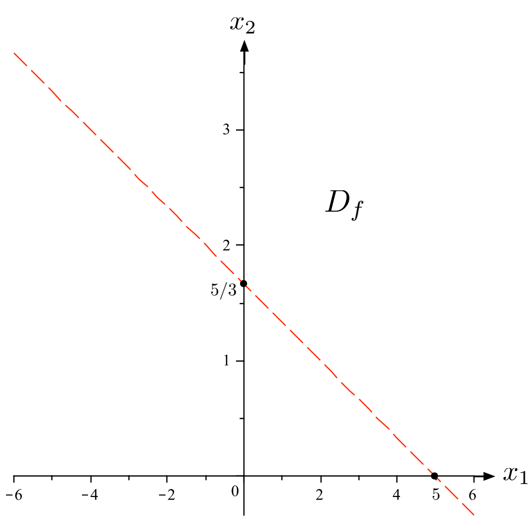

Fig. 1. *Domaine de défintion de f*

demi-plans ouverts, c'est un ouvert. (La frontière de D_f est donnée par la droite d'équation $x_1 + 3x_2 - 5 = 0$. Et cette frontière est entièrement en dehors de D_f). Le domaine D_f n'est pas fermé car, par exemple, le point de coordonnées (5,0) est sur sa frontière mais n'est pas dans D_f. Enfin, D_f n'est pas borné car aucun disque de rayon fixé ne peut le contenir.

Exercice 8. Considérons la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2}. \end{array}$$

Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? Est-il ouvert ? Est-il fermé ? Est-il borné ?

Le domaine de défintion de f est donné par l'ensemble suivant :

$$D_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 \neq 0\}.$$

Si x et y sont dans $\mathbb{R}$ alors $x^2 + y^2 = 0$ si et seulement si $x = y = 0$. Par conséquent, le domaine de définition de f s'écrit plus simplement :

$$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, (x,y) \neq (0,0)\}.$$

La frontière de D_f est donnée par le point de coordonnées (0,0). Comme ce point est en dehors de D_f, il a des chances d'être ouvert. En revanche, D_f n'est pas fermé car le point (0,0) est dans sa frontière mais n'est pas dans D_f. Enfin, D_f n'est pas borné car aucun disque de rayon fixé ne peut le contenir.

Démonstration pour montrer que D_f est ouvert :
Soit $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + y^2 > 0\}$. Si x et y sont dans $\mathbb{R}$ alors on ne peut avoir $x^2 + y^2 < 0$. Par suite, $D_f = A$. Par ailleurs, on peut écrire $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, g(x,y) > 0\}$ avec la fonction g définie par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2. \end{array}$$

Cette fonction g est continue car elle est de type polynomiale donc A est ouvert et donc D_f aussi.