Licence de Sciences Économiques
Université de Nice Sophia-Antipolis

Année 2007-2008
Mathématiques L1

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 4

Exercice 1 (*Examen février 2005*).
On considère la fonction

$$\begin{cases} f \;:\; & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1 + 2x_2 + 4. \end{cases}$$

(1) Justifier en une phrase que f admet des dérivées partielles d'ordre deux.
(2) Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$.
(3) Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, déterminer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)$.
(4) Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(0,\,-1) = 0$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(0,\,-1) = 0$. Calculer $f(0,\,-1)$.
(5) Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2)\right)^2$.
(6) Montrer que f admet en $(0,\,-1)$ un extremum local. Est-ce un maximum local ou un minimum local ?
(7) Trouver les points critiques de f (c'est-à-dire les points où les dérivées partielles d'ordre un s'annulent).

Exercice 2.
Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f \;:\; & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & e^{x^2+2y^2-2xy-y+1}. \end{cases}$
Posons $\Psi(x, y) := x^2 + 2y^2 - 2xy - y + 1$, de telle sorte que $f(x, y) = e^{\Psi(x,\,y)}$.

(1) Quel est le domaine de définition de f ? Pourquoi la fonction f admet-elle des dérivées partielles ?
(2) On pose $C := (x_C, y_C)$ le seul point critique de f. Quelles sont les coordonnées de C ? Calculer la valeur ν de f en C.
(3) La valeur ν est-elle un extremum local de la fonction f ?
Conseil : Utiliser la quantité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_C, y_C) \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_C, y_C) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_C, y_C)\right)^2$.
(4) La valeur ν est-elle un maximum ou un minimum local ?
Conseil : Utiliser la quantité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_C, y_C) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_C, y_C)$.
(5) La fonction f admet-elle un maximum global ?

Exercice 3.
Soit h la fonction définie par $\begin{cases} h \;:\; & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & (2x_1 + x_2)^2 - 4x_1 - 2x_2 + 7. \end{cases}$

(1) Quel est le domaine de définition de h ? Pourquoi la fonction h admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Chercher les points critiques de h.
(3) Soit c un nombre réel et P un point de coordonnées (x_1, x_2) telles que $2x_1 + x_2 = c$. Tracer l'ensemble des points P vérifiant cette condition pour $c = -1$, 0, 1, 2 et 3.

(4) Si $2x_1 + x_2 = c$, que vaut $h(x_1, x_2)$?

(5) La fonction h admet-elle un minimum global, maximum global ? S'il existe, donner sa valeur et dire où il est atteint.

Exercice 4 (*Partiel décembre 2004*)**.**
On considère la fonction $\left\{ \begin{array}{lccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & x+y. \end{array} \right.$

(1) Quel est son domaine de définition ?

(2) Pourquoi cette fonction est-elle continue ?

Posons $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + 4y^2 = 1\}$.

(3) Représenter graphiquement E.

(4) Montrer que E est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.

(5) Montrer que la fonction f admet un maximum M et un minimum m sur E et qu'ils sont atteints. Que valent M et m ? Où sont-ils atteints ?

Exercice 5.
Une ménagère achète un adoucissant P_1 et une lessive P_2. Le prix de l'adoucissant P_1 est p_1 et le prix de la lessive P_2 est p_2. Elle achète des deux produits pour un panier global de 10 euros. Posons x_1 la quantité d'adoucissant achetée et x_2 la quantité de lessive achetée.

(1) Écrire l'équation qui représente la valeur du panier acheté.

On modélise l'utilité du panier par la fonction

$$\left\{ \begin{array}{lcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1,x_2) & \mapsto & \ln(x_1+1) + 2\ln(x_2+1). \end{array} \right.$$

(2) Existe-t-il une utilité optimale ? Si oui pour quelles quantités achetées ?

On pose $\alpha(p_1, p_2)$ la quantité de lessive achetée dans ce cas.

(3) Que se passe-t-il si $2p_1 \leqslant p_2 + 10$ et si $2p_1 \geqslant p_2 + 10$? Commenter ces résultats.

(4) Quel est le signe de $\dfrac{\partial \alpha}{\partial p_1}$ et de $\dfrac{\partial \alpha}{\partial p_2}$? Commenter.

(5) Si l'adoucissant coute 2 euros et la lessive 5 euros, en quelles proportions faut-il acheter les deux produits pour un résultat maximal ? Commenter.

Exercice 6.
On considère la fonction $\left\{ \begin{array}{lcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x_1,x_2) & \mapsto & x_1^2 + x_2^2. \end{array} \right.$

(1) Quel est son domaine de définition ?

(2) Pourquoi cette fonction est-elle continue ?

Posons $A := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1 \geq 0, \, x_2 \geq 0, \, x_1 + x_2 \leq 1\}$.

(3) Représenter graphiquement A.

(4) Montrer que A est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.

(5) Montrer que la fonction f admet un maximum M et un minimum m sur A et qu'ils sont atteints.

Pour calculer m et M, on distingue deux cas. Posons F la frontière de l'ensemble A. L'ensemble F correspond donc au triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Soit I, l'intérieur de l'ensemble A, $I := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x_1,\, 0 < x_2,\, x_1 + x_2 < 1\}$. On a donc $A = F \cup I$.

(6) Montrer que I est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
(7) Chercher et étudier les extrema de f sur I.
Conseil : Utiliser les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f.
(8) Etudier les valeurs prises par la fonction f sur F.
(9) Comparer les résultats des deux questions précédentes et conclure (donner les valeurs de m et M et dire où ces valeurs sont atteintes).

Exercice 7.
Soit A l'ensemble défini par $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1\}$.

On considère maintenant la restriction de la fonction f de l'exercice 2 à A :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} g = f_A & : & A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \mapsto & e^{x^2+2y^2-2xy-y+1}. \end{array} \right.$$

(1) Montrer que l'ensemble A est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.
(2) Expliquer pourquoi la fonction g admet et atteint un minimum m et un maximum M.

Pour calculer m et M, on distingue deux cas. Posons F la frontière de l'ensemble A. L'ensemble F correspond donc au carré de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$. Soit I, l'intérieur de l'ensemble A, $I := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\}$. On a donc $A = F \cup I$.

(3) Montrer que I est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
(4) Le minimum m peut-il être atteint sur I ? Le maximum M peut-il être atteint sur I ?
Conseil : Utiliser l'exercice 2.
(5) Etudier les valeurs prises par la fonction g sur F.
Conseil : Distinguer quatre cas.
(6) Comparer les résultats des deux questions précédentes et conclure (donner les valeurs de m et M et dire où ces valeurs sont atteintes).

Exercice 8.
Soit A l'ensemble défini par $A := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 0 \leq x_1,\, 0 \leq x_2,\, x_1 + x_2 \leq 4\}$.

(1) Représenter graphiquement l'ensemble A.
(2) Montrer que l'ensemble A est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.

On considère la fonction f

$$\left\{ \begin{array}{lllll} f & : & A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1,x_2) & \mapsto & 2(x_1-2)^2 + (x_2-1)^2. \end{array} \right.$$

(3) Expliquer pourquoi la fonction f admet et atteint un minimum m et un maximum M.
(4) Donner les valeurs de m et M et dire où ces valeurs sont atteintes.
Conseil : Inspirez-vous des exercices précédents.