# Licence de Sciences Économiques
# Mathématiques L1
# Année 2004-2005

11 janvier 2005

# Table des matières

# I Généralités sur les ensembles et les applications

**Définition 0.1** *Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de l'ensemble.*

$a \in A$ signifie que $a$ est un élément de $A$.
$\{a, b, c\}$ désigne l'ensemble formé des éléments $a$, $b$ et $c$.
$\emptyset$ désigne l'ensemble sans élément.

**Définition 0.2** *Soit $A$ un ensemble. Un sous-ensemble de $A$ est un ensemble fomé d'éléments de $A$.*

$B \subset A$ signifie que $B$ est un sous-ensemble de $A$. On dit aussi que $B$ est contenu dans $A$.

**Opérations :** Soit $B$ et $C$ deux sous-ensembles de $A$.

L'intersection de $B$ et $C$, notée $B \cap C$ est le sous-ensemble de $A$ formé des élements de $A$ qui sont dans $B$ et dans $C$ :

$$B \cap C = \{a \in A \quad ; \quad a \in B \quad \text{et} \quad a \in C\} \ ,$$

lire : "l'ensemble des éléments $a$ de $A$ tels que $a$ appartient à $B$ et $a$ appartient à $C$".

La réunion de $B$ et $C$, notée $B \cup C$ est le sous-ensemble de $A$ formé des élements de $A$ qui sont dans $B$ ou dans $C$ :

$$B \cup C = \{a \in A \quad ; \quad a \in B \quad \text{ou} \quad a \in C\} \ ,$$

lire : "l'ensemble des éléments $a$ de $A$ tels que $a$ appartient à $B$ ou $a$ appartient à $C$".

Le complémentaire de $B$ dans $A$, noté $A - B$, est l'ensemble des éléments de $A$ qui ne sont pas dans $B$ :

$$A - B = \{a \in A \quad ; \quad a \notin B\} \ ,$$

lire : "l'ensemble des éléments $a$ de $A$ tels que $a$ n'appartient pas à $B$".

**Définition (application) 0.3** *Une application $f : A \to B$ est un procédé qui associe à tout élément $a$ de $A$ un unique élément $b$ de $B$ noté $f(a)$ et appelé image de $a$ par $f$.*

On appelle identité de l'ensemble $A$ et on note $\mathrm{Id}_A$ l'application de $A$ vers $A$ définie par $\mathrm{Id}_A(a) = a$ :

$$\mathrm{Id}_A : A \to A \quad : \quad a \mapsto (\mathrm{Id}_A)(a) = a \ .$$

**Définition (composition des applications) 0.4** *Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle composée de $g$ par $f$ et on note $g \circ f$ l'application de $A$ vers $C$ définie par $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pour tout $a$ dans $A$ :*

$$g \circ f : A \to C \quad : \quad a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)) \ .$$

**Définition (application injective, surjective et bijective) 0.5** *Soit $f : A \to B$ une application. Si pour tout élément $b$ de $B$ l'équation :*

$$f(a) = b$$

*admet*
- *zéro ou une solution, on dit que $f$ est injective,*
- *une ou plus de solutions, on dit que $f$ est surjective,*
- *exactement une solution, on dit que $f$ est bijective.*

**Définition 0.6** *Soit $f : A \to B$ une application bijective. On appelle inverse de $f$, l'application notée $f^{-1} : B \to A$ définie pour tout élément $b$ de $B$ par :*

$$f^{-1}(b) \text{ est l'unique élément } a \text{ de } A \text{ solution de } f(a) = b.$$

Si $f : A \to B$ est une application bijective, on peut vérifier :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A \ .$$

**Définition (fonction) 0.7** *Une fonction $f : A \to B$ est un procédé qui associe à tout élément $a$ de $A$ zéro ou un élément $b$ de $B$ noté alors $f(a)$ et appelé image de $a$. Le domaine de définition de la fonction $f$ est l'ensemble des éléments de $A$ qui ont une image par $f$. On note cet ensemble $\mathcal{D}_f$.*

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions, $g \circ f$ désignera la fonction de $A$ vers $C$ définie sur l'ensemble des éléments $a$ de $\mathcal{D}_f$ tels que $f(a)$ appartienne à $\mathcal{D}_g$ par $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Ainsi, par définition :

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{a \in \mathcal{D}_f \quad ; \quad f(a) \in \mathcal{D}_g\} \ .$$

# II Fonctions numériques

## 1 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels avec $a < b$. Il y a neuf types d'intervalle de $\mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{lcll}
]a,b[ & = & \{x \in \mathbb{R} & ; \quad a < x < b\} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} & ; \quad a < x \leq b\} \\
[a,b[ & = & \{x \in \mathbb{R} & ; \quad a \leq x < b\} \\
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} & ; \quad a \leq x \leq b\} \\
]-\infty,b[ & = & \{x \in \mathbb{R} & ; \quad x < b\} \\
]-\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} & ; \quad x \leq b\} \\
]a,\infty[ & = & \{x \in \mathbb{R} & ; \quad a < x\} \\
[a,\infty[ & = & \{x \in \mathbb{R} & ; \quad a \leq x\} \\
]-\infty,\infty[ & = & \mathbb{R} &
\end{array}$$

Considérons la fonction valeur absolue :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad : \quad x \mapsto \mid x \mid \quad = \quad \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Pour tout $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \mid x+y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid\,, \\ \mid xy \mid = \mid x \mid \mid y \mid\,, \\ \mid x \mid = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Rappelons que pour $\epsilon$ réel positif et $a$ réel :

$$\begin{cases} \mid x-a \mid \leq \epsilon & \text{équivaut à} \quad x \in ]a-\epsilon, a+\epsilon[\,, \\ & \text{équivaut à} \quad a-\epsilon < x < a+\epsilon\,. \end{cases}$$

**Définition (ouvert, fermé, borné) 1.1** *Un sous-ensemble $U$ de $\mathbb{R}$ est dit ouvert si pour tout $u \in U$, il existe $\epsilon$ tel que $]u-\epsilon, u+\epsilon[$ soit contenu dans $U$ (attention que $\epsilon$ dépend du $u$ pris dans $U$).*
*Un sous-ensemble $\mathbb{R}$ est dit fermé si son complémenatire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.*
*Un sous-ensemble $H$ de $\mathbb{R}$ est dit borné s'il existe un réel $M$ tel que pour tout $h \in H$, on ait $\mid h \mid \leq M$.*

**Remarque 1.2** *Soit $a$ et $b$ deux nombres réels avec $a < b$. Les intervalles $]a, b[$, $]-\infty, a[$, $]b, \infty[$ sont ouverts. Les intervalles $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $[b, \infty[$ sont fermés.*

**Remarque 1.3** *L'intersection et la réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts. De même, l'intersection et la réunion de deux fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés et l'intersection et la réunion de deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ sont bornés.*

## 2 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$

Revenons aux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite. Fixons un repère de $\mathcal{D}$. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ s'identifie à la droite $\mathcal{D}$ par l'application qui à un réel $x$ associe le point $M$ de $\mathcal{D}$ d'abscisse $x$.

Soit $x$, $a$ deux réels ; soit $M$ le point de $D$ d'abscisse $x$ et $A$ celui d'abscisse $a$. La longueur du segment $AM$ est $\mid x - a \mid$. Soit de plus, $r$ un réel positif. L'ensemble :

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R} \; ; \; \mid x - a \mid < r\} = ]a - r, a + r[$$

s'identifie donc à l'ensemble $M$ des points de $\mathcal{D}$ qui sont à une distance de $A$ strictement inférieur à $r$. Comme $\sqrt{(x-a)^2} = \mid x - a \mid$, nous avons aussi :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \sqrt{(x-a)^2} < r\} \; .$$

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels. Soit $\mathcal{P}$ un plan. Fixons un repère de $\mathcal{P}$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ s'identifie alors au plan $\mathcal{P}$ par l'application qui au couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ associe le point $M$ de $\mathcal{P}$ de coordonnées $(x_1, x_2)$ dans le repère de $\mathcal{P}$.

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $M$ le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $x = (x_1, x_2)$ et $A$ celui de coordonnées $a = (a_1, a_2)$. La longueur du segment $AM$ est :

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \; .$$

Soit de plus, $r$ un réel positif. Notons :

$$B(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r\} \; .$$

Cet ensemble s'identifie à l'ensemble $M$ des points de $\mathcal{P}$ qui sont à une distance de $A$ strictement inférieur à $r$ ; c'est à dire au disque de centre $a$ et de rayon $r$ sans son bord.

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels. Soit $\mathcal{E}$ un espace. Fixons un repère de $\mathcal{E}$. L'ensemble $\mathbb{R}^3$ s'identifie alors au plan $\mathcal{E}$ par l'application qui au couple $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le point $M$ de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(x_1, x_2, x_3)$ dans le repère de $\mathcal{E}$.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit $M$ le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $A$ celui de coordonnées $a = (a_1, a_2, a_3)$. La longueur du segment $AM$ est :

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}$$

Soit de plus, $r$ un réel positif. Notons :

$$B(a, r) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} < r\} \ .$$

Cet ensemble s'identifie à l'ensemble $M$ des points de $\mathcal{E}$ qui sont à une distance de $A$ strictement inférieur à $r$ ; c'est à dire à la boule de centre $a$ et de rayon $r$ sans son bord.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel . Les définitions ci-dessus se généralisent à l'ensemble $\mathbb{R}^n$ formé des $n$-uplets de nombres réels.

**Définition (distance) 2.1** *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle distance de $x$ à $a$ le nombre réel positif :*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} \ .$$

*et nous notons pour $r$ réel positif :*

$$B(a, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} < r\} \ .$$

**Définition (ouvert, fermé, borné) 2.2** *Un sous-ensemble $U$ de $\mathbb{R}^n$ est dit ouvert si pour tout $u \in U$, il existe $\epsilon$ tel que $B(u, \epsilon)$ soit contenu dans $U$ (attention : $\epsilon$ dépend du $u$ pris dans $U$).*
*Un sous-ensemble $\mathbb{R}^n$ est dit fermé si son complémenatire dans $\mathbb{R}^n$ est ouvert.*
*Un sous-ensemble $H$ de $\mathbb{R}^n$ est dit borné s'il existe un réel $M$ tel que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$, on ait $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} < M$.*

**Remarque 2.3** *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r$ un réel positif. Alors $B(x, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle cet ensemble la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$.*

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r$ réel positif. Désignons par :

$$\tilde{B}(a, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; \max\{\mid x_1 - a_1 \mid, \ldots, \mid x_n - a_n \mid\} < r\} \; .$$

Pour $n = 2$, si $A$ désigne le point de coordonnnées $a = (a_1, a_2)$, $\tilde{B}(a, r)$ s'identifie au carré de centre $a$ dont la longueur des cotés est $2r$.

Nous avons :

$$B(a, r) \subset \tilde{B}(a, r) \subset B(a, \sqrt{n}\, r) \subset \tilde{B}(a, \sqrt{n}\, r) \; .$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des $n$-uplets de réels est muni d'une addition, d'une soustraction et d'une multiplication par les réels. Soit :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad x = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- la somme de $x$ et $y$ est le n-uplet noté $x + y$ défini par :

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \; ,$$

- la différence de $x$ par $y$ est le n-uplet noté $x - y$ défini par :

$$x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \; ,$$

- le produit de $x$ par $\lambda$ est le n-uplet noté $\lambda x$ défini par :

$$\lambda x = (\lambda x_1 + y_1, \ldots, \lambda x_n) \; .$$

On note $0 \in \mathbb{R}^n$ le n-uplet $(0, \ldots, 0)$.

On peut vérifier que pour tout $x$,$y$,$z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
&(x+y)+z = (x+y)+z \ , \\
&\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \ , \\
&\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \ , \\
&(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \ , \\
&x - x = 0 \ .
\end{aligned}$$

**Remarque 2.4** *L'intersection et la réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts. De même, l'intersection et la réunion de deux fermés de $\mathbb{R}^n$ sont des fermés et l'intersection et la réunion de deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$ sont bornés.*

# 3 Fonctions numériques : définitions et exemples

On appelle fonction numérique à $n$ variables une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ d'un sous-ensemble $U$ de $\mathbb{R}^n$ vers l'ensemble des nombres réels.

**Exemple** : Considérons la fonction :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \ .$$

Son domaine de définition est :

$$\mathcal{D}_g = \{x = (x_1, x_2) \quad ; \quad x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 > 0\} \ .$$

Considérons la fonction :

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \ .$$

Son domaine de définition est :

$$\mathcal{D}_g = \{x = (x_1, x_2) \quad ; \quad x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 \neq 0\}$$

qui s'identifie à la réunion des axes de coordonnées.

Considérons deux fonctions $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$, et un réel $\lambda$.

On appelle somme de $f$ et $g$ la fonction notée $f+g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ par :

$$(f+g)(x_1, \dots, x_n) := (f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n) \ .$$

On appelle produit de $f$ par $g$ la fonction notée $fg : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ par :

$$(fg)(x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_n) \ .$$

Les fonctions $f+g$ et $fg$ sont définies en tout point où $f$ et $g$ le sont. Les domaines de définitions de $f+g$ et $fg$ sont donc $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ l'intersection du domaine de définition de $f$ et du domaine de définition de $g$.

On appelle quotient de $f$ par $g$ la fonction notée $\dfrac{f}{g} : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ par :

$$\frac{f}{g}(x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} \ .$$

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie en tout point où $f$ et $g$ sont définies et où $g$ ne s'annule pas.

$$\mathcal{D}_{f/g} = \{x \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_f \quad ; \quad g(x) \neq 0\}$$

On appelle produit de $f$ par $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction notée $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ par :

$$(\lambda f)(x_1, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n) \ .$$

Le domaine de définition de $\lambda f$ coïncide avec celui de $f$.

**Exemple** Soient $f$,$g$ les fonctions numériques :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 - x_1^2 \ ,$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto 2x_1^2 + x_2^2 \ .$$

La fonction $\dfrac{f+g}{g}$ est la fonction :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{2x_1^2 + x_2^2} \ .$$

Montrer que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$.

**Définition (norme usuelle) 3.1** *Nous appelons norme usuelle de $\mathbb{R}^n$ l'application de $\mathbb{R}^n$ vers l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs définie par :*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \quad : \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \| x \| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \ .$$

Avec cette définition si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et si est un $r$ réel positif.

$$B(a, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \| x - a \| < r\} \ .$$

En effet, par définition de la soustraction dans $\mathbb{R}^n$ :

$$\| x - a \| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$$

qui n'est d'ailleurs rien d'autre que la distance de $x$ à $a$.

Pour tout $x$, $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut montrer :

$$\begin{cases} \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \,, \\ \| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \| \,, \\ \| x \| = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$

Considérons la fonction numérique d'une seule variable :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{2} x^{17} + 5x - 4$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction polynômiale d'une variable de degré 17.

**Définition (fonction polynômiale d'une variable) 3.2** *Soit $m+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tels que*

$a_0 \neq 0$. *On appelle fonction polynômiale d'une variable de degré $m$ la fonction :*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_0 \ .$$

Considérons la fonction numérique de deux variables :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = \frac{2}{3} x_1^{12} x_2^5 + 5 x_1^3 x_2^7 - 4 \ .$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$. C'est une fonction polynômiale de deux variables.

**Définition (fonction polynômiale de $n$ variables) 3.3** *Soit $I$ un sous-ensemble fini de n-uplets d'entiers naturels. Donnons nous pour chaque élément $(k_1, \ldots, k_n)$ de $I$ un réel noté $a_{k_1,\ldots,k_n}$. La fonction :*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \in I} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

*est appelée fonction polynômiale de $n$ variables.*

On remarque que la somme et le produit de deux fonctions polynômiales de $n$ variables est une fonction polynômiale de $n$ variables, de même que le produit d'une fonction polynômiale de $n$ variables par un réel.

**Définition (fonction rationelle de $n$ variables) 3.4** *On appelle fonction rationelle de $n$ variables le quotient de deux fonctions polynômiales de $n$ variables*

**Exemple** La fonction :

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \frac{x_1^5 x_2 + x_1 x_2^3}{x_1^3 x_2^6 + x_1 + 2}$$

est une fonction rationelle de deux variables. Elle est définie sur :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_1^3 x_2^6 + x_1 + 2 \neq 0\} \ .$$

Cet ensemble n 'est pas du tout évident à représenter géométriquent.

On remarque que la somme, le produit et le quotient de deux fonctions rationelles de $n$ variables est une fonction rationelle de $n$ variables, de même que le produit d'une fonction rationelle de $n$ variables par un réel.

# 4 Fonctions numériques : limite et continuité

**Définition (point adhérent) 4.1** *Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Un point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est dit adhérent à $A$ si pour tout réel strictement positif, $B(a, r)$ rencontre $A$.*

**Exemple avec $n = 1$ :** Le réel $u$ est adhérent à $A = ]u, v[ \subset \mathbb{R}$. En effet, pour tout réel strictement positif $r$, $B(u, r) = ]u - r, u + r[$ rencontre $]u, v[$.

**Exemple avec $n = 2$ :** Le point $(2, 0)$ est adhérent au sous-ensemble :

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_2 > 0\} \ .$$

En effet, il est clair que la boule $B((2, 0), r)$ qui est le disque de centre $(2, 0)$ et de rayon $r$ rencontre $A$ pour tout $r$ réel strictement positif. Par contre le point $(2, -1)$ n'est pas adhérent à $A$.

**Remarque 4.2** *Un point de $A$ est toujours adhérent à $A$.*

**Définition (limite) 4.3** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ adhérent à $A$ et $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers $a$, ou encore que $f$ a pour limite $l$ quand $x$ tend vers $a$ si " $f$ est proche de $l$ quand $x$ est proche de $a$", c'est-à-dire : si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que*

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(a, \eta) \quad \text{et} \quad x \in A \quad \text{implique} \quad | f(x) - l | < \epsilon \ .$$

*Si cette limite existe, elle est unique. Nous la notons :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ .$$

**Exemple** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1$. Le point $a = (17, 2)$ est adhérent à $\mathbb{R}^2$, car c'est un point de $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (17,2)} f(x_1, x_2) = f(17, 2) = 17 \ .$$

En effet, soit $\epsilon > 0$. Rappelons que :

$$B((17, 2), \eta) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \sqrt{(x_1 - 17)^2 + (x_2 - 2)^2} < \eta\} \ .$$

Nous devons montrer que : tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\sqrt{(x_1-17)^2+(x_2-2)^2} < \eta \quad \text{implique} \quad | x_1 - 17 | < \epsilon \ .$$

Il suffit de prendre $\eta = \epsilon$, puisque pour tout $(x_1, x_2)$ :

$$| x_1 - 17 | \leq \sqrt{(x_1-17)^2+(x_2-2)^2} \quad .$$

Plus généralement, on montre de même que pour tout $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) = a_1 \quad .$$

**Opérations sur les limites :** Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ adhérent à $A$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l'$, $\lim_{x\to a} g(x) = l''$. Nous avons :

i) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ existe et vaut $l' + l''$,

ii) $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x)$ existe et vaut $\lambda l'$,

iii) $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x)$ existe et vaut $\lambda l'$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si de plus, $g$ est non nulle sur $A$ et $l'' \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a}(f/g)(x)$ existe et vaut $l'/l''$.

Donnons une propriété utile pour calculer des limites.

**Proposition 4.4** *Soient $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ adhérent à $A$. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ tel que si $x$ appartient à $B(a, r)$, on ait :*

$$f(x) \geq g(x) \geq h(x) \ .$$

*Supposons alors que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe et vaut $l$.*

**Remarque 4.5** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$. Si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $l = f(a)$.*

**Définition (continuité) 4.6** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ On dit que $f$ est continue en $a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe. Comme $a \in A$, on a alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On dit que $f$ est continue si $f$ est continue en tout point de $A$.*

**Opérations sur les fonctions continues :** Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $f$ et $g$ sont continues en un point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$. Alors les fonctions $f + g$, $fg$ et $\lambda f$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$) sont continues en $a$. Si de plus $g$ est non nul sur $A$, la fonction $f/g$ est continue en $a$. Il en est de même si on remplace continue en $a$ par continue.

**Proposition 4.7** *Une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est continue. Une fonction rationelle est continue sur son domaine de définition.*

Idée de la preuve : On montre comme dans l'exemple précédent que les fonctions coordonnées $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; : \; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ sont continues. On en déduit que les fonctions polynomiales sont continues, car elles s'obtiennent comme produit et sommes finies de fonctions coordonnées.

**Exemple :** La fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

est continue car polynomiale. En particulier,

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (3,2)} f(x_1, x_2) = f(3, 2) = 17 \; .$$

Considérons la fonction rationelle :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \; .$$

Son domaine de définition est :

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 > 0\} \; .$$

Considérons la fonction

$$h : D \to \mathbb{R} \; : \; (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \; .$$

La propostion 4.7 signifie que $h$ est continue. En particulier,

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (3,2)} h(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \; .$$

**Proposition 4.8** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $B \subset A$, on appelle restriction de $f$ à $B$ l'application notée $f_{|B}$ :*

$$f_{|B} : B \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto f(x) \; .$$

*Alors si $f$ est continue, la restriction de $f$ à $B$ est continue.*

**Exemple :** Considérons la fonction $f$ :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_2 \; .$$

Cette fonction est continue car polynomiale. La restriction de cette fonction à $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ :

$$\mathcal{C} \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f_{|\mathcal{C}}(x_1, x_2) = x_2$$

est donc continue.

**Composition de limites et de fonctions continues :**
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $g : B \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $B$ de $\mathbb{R}$. Pour composer $g$ par $f$, il faut et il suffit que pour $x \in A$, $f(x) \in B$. On peut alors définir :

$$g \circ f : A \to \mathbb{R} \; : \; x \mapsto g(f(x)) \; .$$

i) Supposons que $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à $A$ et que $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Alors, $b$ est adhérent à $B$. Supposons aussi que $\lim_{y \to b} g(y) = l$. Alors :

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) \quad \text{existe et vaut} \quad l \; .$$

ii) Si $f$ est continue en $a \in A$ et si $g$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $a$.
iii) Si $f$ et $g$ sont continues, $g \circ f$ est continue.

**Exemple :** Considérons la fonction $f$ :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2} \; .$$

Cette fonction s'obtient par composée de la fonction polynomiale :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto) = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

et de la fonction racine :

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto= \sqrt{x} \,.$$

La première fonction est continue car polynomiale. En revenant à la définition des limites, on peut montrer que la fonction racine est continue (nous l'admettrons).

Généralisons quelque peu ce principe de composition. Considérons $p$ fonctions $f_1, \ldots, f_p : A \to \mathbb{R}$ définies sur un ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions permettent de définir une application :

$$f : A \to \mathbb{R}^p \;:\; x \mapsto (f_1(x), \ldots f_p(x)) \,.$$

Soit $g : B \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $B \subset \mathbb{R}^p$. Pour composer $g$ par $f$, il suffit que pour $x \in A : f(x) \in B$. La fonction $g \circ f$ est alors définie :

$$g \circ f : A \to \mathbb{R} \;:\; x \mapsto g(f_1(x), \ldots, f_p(x)) \,.$$

i) Supposons que $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à $A$ et que pour tout entier $1 \leq j \leq p$, on ait : $\lim\limits_{x \to a} f_j(x) = b_j$. Alors, $b = (b_1, \ldots, b_p)$ est adhérent à $B$. Supposons aussi que $\lim_{y \to b} g(y) = l$. Alors, $\lim\limits_{x \to a}(g \circ f)(x)$ existe et vaut $l$.

i)) Si $f$ est continue en $a \in A$ et si $g$ est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ esr continue en $a$.

i))) Si $f$ et $g$ sont continues, $g \circ f$ est continue.

## 5 Trois résultats sur les fonctions continues

**Proposition 5.1** *Soit $f$ une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}^n$.*

1. *Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n \;;\; f(x) \in U\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Soit $F$ un fermé de $\mathbb{R}$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n \;;\; f(x) \in F\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Signalons que ce résultat est vrai sous la forme plus générale suivante que nous ne devrions pas utiliser :

**Proposition 5.2** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un sous-ensemble $A$ de $\mathbb{R}^n$ et continue.*

1. *Soit $U$ est ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\{x \in A \; ; \; f(x) \in U\}$ est l'intersection de $A$ avec un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Soit $F$ un fermé de $\mathbb{R}$, alors $\{x \in A \; ; \; f(x) \in F\}$ est l'intersection de $A$ avec un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

**Exemple :** Considérons la fonction polynomiale :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto 2x_1^2 + x_2^2 \; .$$

L'ensemble $F = \{1\}$ réduit à un élément est un fermé de $\mathbb{R}$, car son complémentaire $\mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty, 1[ \cup ]1, \infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x_1, x_2) \in F\} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x_1, x_2) \in \{1\}\} \; , \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x_1^2 + x_2^2 = 1\} \; . \end{aligned}$$

D'autre part, $f$ est une fonction polynomiale, donc définie sur $\mathbb{R}^2$ et continue.
Il résulte de la proposition 5.1, que l'ensemble :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Considérons la même fonction $f$ et le sous-ensemble $U = ]-\infty, 1[$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x_1, x_2) \in U\} &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x_1, x_2) \in ]-\infty, 1[\} \; , \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x_1^2 + x_2^2 < 1\} \; . \end{aligned}$$

Comme $U$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

est, d'après la proposition 5.1, un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

**Théorème 5.3** *Soit $A$ un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f$ possède un maximum et un minimum qui sont atteints :*

*i) il existe $M$ un réel tel que pour tout $x$ dans $A$, nous ayons $f(x) \leq M$ et de plus, il existe $n$-uplet $a$ dans $A$ tel que $f(a) = M$ ;*

*ii) il existe $m$ un réel tel que pour tout $x$ dans $A$, nous ayons $m \leq f(x)$ et de plus, il existe $n$-uplet $b$ dans $A$ tel que $f(b) = m$.*

**Exemple :** Considérons l'ensemble :

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x_1^2 + x_2^2 = 1\} \ .$$

Nous avons montré que c'est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in A$. Nous avons :

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2x_1^2 + x_2^2 = 1 \ .$$

Ainsi, $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ et $(x_1, x_2)$ appartient à la boule de centre l'origine et de rayon 1. L'ensemble $A$, contenu dans la boule de centre l'origine et de rayon 1, est donc borné. Considérons alors l'application :

$$h : A \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \to x_1$$

Cette application $h$ est continue, car c'est la restriction à $A$ d'une application polynomiale et donc continue. Comme $A$ est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$, le théorème 5.3 nous assure que $f$ possède un maximum et un minimum qui sont tous les deux atteints.
Nous allons au moyen d'un calcul direct déterminer ces données. Pour ce faire, commençons par remarquer que si $(x_1, x_2) \in A$ , $2x_1^2 + x_2^2 = 1$ et donc $2x_1^2 \leq 1$. De la croissance de fonction $x \mapsto x^2$ sur les réels positifs, il en résulte que $\mid x_1 \mid \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi pour tout $(x_1, x_2) \in A$, nous avons :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq h(x_1, x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Mais nous avons :

$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in A \quad \text{et} \quad h(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in A \quad \text{et} \quad h(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est un maximum de $h$ atteint en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ est un minimum de $h$ atteint en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

**Théorème (des valeurs intermédiaires) 5.4** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $a < b$ deux réels avec $[a, b] \in I$. Alors $f$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ : pour tout $\gamma$ entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

**Exemple :** Considérons la fonction :

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto \frac{2 - x^3}{x + 1} \ .$$

La fonction $f$ est une fraction rationnelle. Elle est donc continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} - \{-1\}$. L'intervalle $[0, 1]$ est contenu dans $\mathbb{R} - \{-1\}$. Comme $f(0) = 2$ et $f(1) = \frac{1}{2}$, il résulte du théorème 5.4 que $f$ prend au moins toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{2}$ et 2.

Soit $J$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable. Rappelons que l'on dit que $g$ est strictement croissante sur $J$ si :

$$\forall x, y \in J \quad , \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \ .$$

De même, $g$ est dite strictement décroissante si :

$$\forall x, y \in J \quad , \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \ .$$

La fonction $g$ est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

**Corollaire 5.5** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $a < b$ deux réels avec $[a, b] \in I$. Supposons de plus que $f$ est strictement monotone sur $[a, b]$. Alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel $c$ dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.*

# III Dérivées partielles d'une fonction numérique

## 1 Compléments sur les limites

**Définition 1.1** *Soit $B \subset A$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $A$. On appelle restriction de $f$ à $B$ et on note $f_{|B}$ l'application :*

$$f_{|B} : B \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \to f(x).$$

Soit $b$ un point adhérent à $B$. Lorsqu'elle existe, on pourra noter la limite de $f_{|B}$ quand $x$ tend vers $b$ :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in B}} f(x).$$

**Proposition 1.2** *Soit $B \subset A$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $A$. Soit $x_0$ un point adhérent à $B$ (donc à $A$).*
*Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, alors $\lim_{\substack{x \to b \\ x \in B}} f(x)$ existe et $\lim_{\substack{x \to b \\ x \in B}} f(x) = l$.*

**Illustration :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto f(x) = x + 1$.
Soit $B = \mathbb{R} - \{2\}$. Le réel 2 est bien adhérent à $B$. Comme $f$ est continue, car polynomiale, on a

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3,$$

et ainsi

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} f(x) = 3.$$

**Proposition 1.3** *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur des sous-ensembles $A$ et $B$ de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $f = g$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant un point $x_0$ (par exemple la boule $B(x_0, r)$ pour un réel $r > 0$). Alors, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existe. Dans ce cas, on a*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

## 2 Dérivée d'une fonction numérique d'une variable

**Définition 2.1** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I$. Soit $x_0 \in I$. On dit que la fonction $f$ est dérivable en $x_0$ si la fonction*

$$I - \{x_0\} \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*admet une limite quand $x$ tend vers $x_0$. Dans ce cas, la limite est appelée la dérivée de $f$ en $x_0$ et notée :*

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nous notons $f'$ la fonction qui associe à un point $x$ où $f$ est dérivable, le réel $f'(x)$ dérivée de $f$ en $x$. Cette fonction est appelée la dérivée de $f$.

**Exemple :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto f(x) = |x|$.
Pour $x > 0$, $f(x)$ coïncide avec la fonction polynomiale $g$ définie par $g(x) = x$.
Soit $x_0 > 0$, pour $x \neq x_0$ dans un petit intervalle ouvert contenant $x_0$, nous avons $x > 0$ et donc :

$$\delta(x) = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

On en déduit que $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = 1$. De même pour $x_0 < 0$, on montre que $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = -1$.
Il reste à regarder si $f$ est dérivable en $x_0 = 0$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{|x|}{x}.$$

Or pour $x > 0$, $\dfrac{|x|}{x} = 1$ et pour $x < 0$, $\dfrac{|x|}{x} = -1$, nous obtenons alors en utilisant la proposition 1.3 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ n'existe pas (car sinon d'après la proposition 1.2 on aurait $1 = -1$) et $f$ n'est donc pas dérivable en 0.

Notons que plus généralement la notion de dérivée est locale. Si deux fonctions $f$ et $g$ coïncident sur un intervalle ouvert contenant $t$, alors $f$ dérivable en $t$ équivaut à $g$ dérivable en $t$. Dans ce cas, on a de plus $f'(t) = g'(t)$.

**Compléments : dérivées à gauche et à droite**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble $I$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose qu'il existe $\eta$ tel que $]x_0 - \eta,\, x_0] \subset I$ (resp. $[x_0,\, x_0 + \eta[$). On dit que $f$ est dérivable à gauche (resp. à droite) en $x_0$ si le restriction de $f$ à $]x_0 - \eta,\, x_0]$ (resp. $[x_0,\, x_0 + \eta[$) est dérivable en $x_0$. La dérivée de la restriction de $f$ à $]x_0 - \eta,\, x_0]$ (resp. $[x_0,\, x_0 + \eta[$) s'appelle la dérivée à gauche (resp. à droite) et notée $f'_g(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$) :

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si $f$ à une dérivée à gauche et à droite en $x_0$ et si $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$, la fonction $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

**Opérations sur les fonctions dérivables :**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un sous-ensemble $I$ de $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si $f$ et $g$ sont dérivables en $x_0$, on a

$$\begin{array}{lll}
f+g \text{ est dérivable en } x_0 & \text{et} & (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \\
\lambda f \text{ est dérivable en } x_0 & \text{et} & (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0), \\
fg \text{ est dérivable en } x_0 & \text{et} & (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{array}$$

Si de plus, $f(x_0) \neq 0$, on a

$$\frac{1}{f} \text{ est dérivable en } x_0 \quad \text{et} \quad (\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2},$$

$$\frac{g}{f} \text{ est dérivable en } x_0 \quad \text{et} \quad (\frac{g}{f})'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - g(x_0)f'(x_0)}{f(x_0)^2}.$$

**Exemple :** Soit $n$ un entier et $a_0, \ldots, a_n$ des réels. La fonction polynomiale

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

est dérivable pour tout $x$ réel et $f'$ est la fonction polynomiale

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1.$$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur des sous-ensembles $I$ et $J$ de $\mathbb{R}$. Soit $x \in I$ tel que $f(x) \in J$. Si $f$ est dérivable en $x$ et $g$ est dérivable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est dérivable en $x$ et

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)\, g'(f(x)).$$

**Exemple :** La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ; $x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ est définie sur $\mathbb{R}$, car pour tout $x$ réel $x^2 + x + 1 > 0$. Elle est la composée $g \circ f$ de la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto x^2 + x + 1$$

par la fonction

$$g : \mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto \ln x.$$

Ces deux fonctions étant dérivables, $h$ est dérivable pour tout réel $x$ et

$$h'(x) = f'(x)\, g'(f(x)) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

**Proposition 2.2** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble $I$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Alors, $f$ est dérivable en $x_0$ si et seulement s'il existe une fonction numérique $\epsilon$ d'une variable avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ telle que*

$$\text{pour } h \in \mathbb{R} \text{ tel que } x_0 + h \in I \ : \ f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \epsilon(h)\, h.$$

Ainsi, pour $h$ voisin de 0, $f(x_0+h)$ est proche de $f(x_0) + f'(x_0)h$.

**Proposition 2.3** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble $I$ de $\mathbb{R}$. Si $f$ est dérivable en $x_0 \in I$ alors $f$ est continue en $x_0$.*

**Démonstration :** Par définition de la dérivée, la fonction

$$\delta : I \to \mathbb{R} \quad ; \quad x \mapsto \delta(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0, \\ f'(x_0) & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

est continue en $x_0$. Or pour tout $x \in I$, $f(x) = f(x_0) + \delta(x)(x - x_0)$. Ainsi, $f$ est continue en $x_0$ comme somme et produit de telles fonctions.

On appelle dérivée seconde d'une fonction numérique $f$ d'une seule variable la dérivée de la fonction $f'$. On la note $f''$. Plus généralement, la dérivée $p^{ième}$ de $f$, notée $f^{(p)}$ est la dérivée de la fonction $f^{(p-1)}$.

# 3 Dérivées partielles

**Définition 3.1** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ; $(x_1, \ldots, x_n) \to f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction numérique définie sur $\Omega$ sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
*Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$. On dit que $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $x_i$ en $a$ si la fonction :*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ x_i \mapsto f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

*est dérivable en $a_i$. Cette dérivée est appelée la dérivée partielle par rapport à $x_i$ de $f$ en $a$ et notée :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Autrement dit, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est la limite

$$\lim_{\substack{x \to a_i \\ x \neq a_i}} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{x - a_i}.$$

Nous notons $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ la fonction qui associe à un point $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ où $f$ est dérivable par rapport à $x_i$, le réel $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ dérivée partielle par rapport à $x_i$ de $f$ en $x$. Cette fonction est appelée la dérivée partielle par rapport à $x_i$ de $f$.

**Règle :** Pour déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, il suffit de dériver la fonction d'une variable obtenue à partir de $f$ en fixant $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

Lorsque $n = 1$, la dérivée partielle relativement à la seule variable $x$ n'est autre que la dérivée usuelle.

La notion de dérivées partielles est une notion locale. Si deux fonctions numériques $f$ et $g$ coïncident sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant $x$, alors $f$ admet un dérivée partielle par rapport à la variable $x_i$ si et seulement si $g$ admet un dérivée partielle par rapport à la variable $x_i$. Dans ce cas, on a de plus

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

**Exemple :** Considérons la fonction polynomiale :

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \; ; \; (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Elle admet des dérivées partielles par rapport à chacune des trois variables en tous les points, car lorsque l'on fixe deux variables, la fonction d'une variable obtenue est polynomiale. Nous obtenons

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_3 + x_2, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 + x_1 + x_3, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = 2x_3 + x_1 + x_2. \end{cases}$$

Plus généralement, les fonctions polynomiales admettent des dérivées partielles par rapport à toutes les variables et ces dérivées partielles sont encore des fonctions polynomiales.

**Exemple d'une fonction non continue admettant des dérivées partielles :** Considérons la fonction :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \; ; \; (x,\, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,\, y) \neq (0,\, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,\, y) = (0,\, 0). \end{cases}$$

Pour tout $x$ réel, on a donc $f(x,\, 0) = 0$. La fonction d'une variable

$$x \mapsto f(x,\, 0) = 0$$

est dérivable de dérivée la fonction nulle. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $x$ en $(x,\, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\, 0) = 0$. De même, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $y$ en $(0,\, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,\, y) = 0$. Donc, $f$ admet des dérivées partielles en $(0,\, 0)$ par rapport à $x$ et $y$.

Nous allons montrer par contre que $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Raisonons par l'absude. Si $f$ était continue en $(0,\, 0)$, il existerait un réel $l$ tel que $\lim\limits_{(x,\, y) \to (0,\, 0)} f(x,\, y) = l$. Considérons alors la fonction continue :

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; t \mapsto a(t) = t.$$

D'une part, $\lim\limits_{t \to 0} a(t) = a(0) = 0$. Par composition des limites, nous aurions alors

$$\lim_{t \to 0} f(a(t), a(t)) = l.$$

Comme pour $t \neq 0$, $f(a(t),\, a(t)) = f(t,\, t) = 1/2$, nous obtiendrons $l = 1/2$. D'autre part, nous avons aussi $\lim_{t\to 0} -a(t) = -a(0) = 0$. Par composition des limites, nous aurions alors :

$$\lim_{t\to 0} f(a(t), -a(t)) = l.$$

Comme pour $t \neq 0$, $f(a(t), -a(t)) = f(t, -t) = -1/2$, nous obtiendrons $l = -1/2$.
Ainsi, $f$ n'est pas continue en $(0,\, 0)$. (*cf.* Exercice 8 de la feuille de TD 2).

**Opérations sur les dérivées partielles :**

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \Omega$. Si $f$ et $g$ admettent des dérivées partielles en $x$ par rapport à la variable $x_i$, il en est de même des fonctions $f+g$, $\lambda f$ et $fg$ et on a :

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x),$$

$$\frac{\partial \lambda f}{\partial x_i}(x) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

$$\frac{\partial fg}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

Si de plus $f(x) \neq 0$, les fonctions $1/f$ et $g/f$ admettent des dérivées partielles en $x$ par rapport à la variable $x_i$ et on a :

$$\frac{\partial(\frac{1}{f})}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{f(x)^2},$$

$$\frac{\partial(\frac{g}{f})}{\partial x_i}(x) = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) f(x) - g(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{f(x)^2}.$$

**Exemple de conséquences :** Les fonctions rationnelles admettent des dérivées partielles par rapport à toutes les variables aux points où elles sont définies.

Donnons quelques résultats sur l'existence et le calcul des dérivées partielles d'une fonction composée.

Considérons tout d'abord une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ d'une variable admettant une dérivée sur $\mathbb{R}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ; $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$ admettant des dérivées partielles. Il résulte des résultats sur les dérivées de fonction d'une variable que la fonction

$$h : \Omega \to \mathbb{R} \; ; \; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto g(f(x_1, \ldots, x_n))$$

admet des dérivées partielles et que pour tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) g'(f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Le cas général est plus compliqué et demande des hypothèses plus fortes que les simples hypothèses d'existence de certaines dérivées partielles.

**Proposition 3.2** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f$ la fonction de $\Omega \to \mathbb{R}^p$ définie par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_p) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$.*
*On suppose que les fonctions numériques $f_j$, $1 \leq j \leq n$, admettent des dérivées partielles continues sur $\Omega$ par rapport à toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$.*
*Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(y_1, \ldots, y_p) \mapsto g(y_1, \ldots, y_p)$.*
*On suppose que $g$ admet des dérivées partielles continues sur $U$ par rapport à toutes les variables $y_1, \ldots, y_p$.*
*On suppose enfin que pour tout $x \in \Omega$, $f(x) \in U$. Alors, la fonction*

$$g \circ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad ; \quad g \circ f(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$$

*est définie sur $\Omega$ et admet des dérivées partielles continues en tout point de $\Omega$ par rapport à toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$.*
*De plus, pour tout $1 \leq j \leq n$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, on a*

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial g}{\partial y_j}(f_1(x), \ldots, f_p(x)).$$

Reformulons cette proposition dans un cas particulier.

Considérons une fonction $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$$(y_1, \ldots, y_p) \mapsto g(y_1, \ldots, y_p)$$

et admettant des dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^p$. Soit

$$f_1, \ldots, f_p : I \to \mathbb{R}$$

des fonctions d'une variable admettant des dérivées continues sur un intervalle ouvert $I$. Alors la fonction

$$h : I \to \mathbb{R} \; ; \; t \mapsto g(f_1(t), \ldots, f_p(t))$$

est dérivable sur $I$ et pour tout $t \in I$ :

$$h'(t) = \sum_{j=1}^{p} f_j'(t) \frac{\partial g}{\partial y_j}(f_1(t), \ldots, f_p(t)).$$

**Proposition 3.3** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ; $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction numérique définie sur $\Omega$ sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que les dérivées partielles de $f$ existent sur $\Omega$ et sont continues au point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$.*

*1) Alors $f$ est continue en $a$.*

*2) Il existe une fonction numérique de $n$ variables $\epsilon$ avec*

$$\lim_{(h_1, \ldots, h_n) \to 0} \epsilon(h_1, \ldots, h_n) = 0$$

*telle que pour tout $(h_1, \ldots, h_n)$ vérifiant $(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) \in \Omega$, on ait*

$$f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \epsilon(h_1, \ldots, h_n) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}.$$

Autement dit, pour $(h_1, \ldots, h_n)$ petit, $f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n)$ est proche de

$$f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$

**Définition 3.4** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ; $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction numérique définie sur $\Omega$ sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. On suppose que les dérivées partielles de $f$ existent sur $\Omega$ et sont continues au point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$. L'application*

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{Df(a)} \mathbb{R} \quad ; \quad (h_1, \ldots, h_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

*est appelée la différentielle (totale) de $f$ en $a$.*

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \ (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ une fonction numérique définie sur $\Omega$ sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Supposons que la dérivée partielle de $f$ existe par rapport à $x_i$ existe en tout point de $\Omega$. Si elle existe, nous notons alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

la dérivée partielle par rapport à $x_j$ de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ en $x$. La fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ est appelé dérivée partielle d'ordre deux.

Par itération, on définit les dérivées partielles d'ordre $k \geq 3$ d'une fonction numérique de plusieurs variables.

# 4 Quelques résultats

**Théorème de Schwarz 4.1** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ; $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ une fonction numérique définie sur $\Omega$ sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Supposons que les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur $\Omega$ pour $1 \leq i, \, j \leq n$ et sont continues, alors pour $1 \leq i, \, j \leq n$, on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

**Contre-exemple sans l'hypothèse de continuité :** Considérons la fonction :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ : \ (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

En dehors de $(0, 0)$, $f$ coïncide avec la fraction rationelle $\dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ définie sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$. Ainsi, $f$ admet en dehors de l'origine des dérivées partielles par rapport à $x$ et $y$. On a

$$\forall (x, y) \neq (0, 0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) y (3x^2 - y^2) - 2x^2 y (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\forall (x,\, y) \neq (0,\, 0) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,\, y) = \frac{(x^2+y^2)x(x^2-3y^2) - 2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Comme pour tout $x$ réel $f(x,\, 0) = 0$, par définition des dérivées partielles nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\, 0) = 0.$$

De même, pour tout $y$ réel $f(0,\, y) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,\, 0) = 0$.

Nous avons alors par définition :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,\, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,\, 0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-y^5}{y^5} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,\, 0)}{y} = \lim_{x \to 0} \frac{x^5}{x^5} = 1.$$

Ainsi, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

On peut noter que sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ les dérivées partielles d'ordre 2 de $f$ existent et sont continues (car sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ $f$ coïncide avec une fraction rationnelle définie). Le théorème de Schwarz donne tout de même

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y).$$

**Extrema locaux d'une fonction numérique :**

Soit $A$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ admet un maximum absolu (ou global) au point $a$ si pour tout $x \in A : f(x) \leq f(a)$. On dit que $f$ admet un maximum relatif (ou local) au point $a$ s'il existe un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $a$ tel que pour tout $x \in A \cap V : f(x) \leq f(a)$.

On définit de même en remplaçant $\leq$ par $\geq$ les notions de minimum absolu et relatif. Par extremum, on entend minimum ou maximum.

**Proposition 4.2** *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ et*

$$f : A \to \mathbb{R} \quad ; \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n).$$

*On suppose qu'il existe un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ contenant $a$ et contenu dans $A$ (par exemple une boule ouverte $B(a,\, r)$ de centre $a$ de rayon $r > 0$ petit) et on suppose que $f$ admet des dérivées partielles sur $U$. Alors si $f$ possède un extremum local en $a$, nous avons*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

**Démonstration :** Supposons, par exemple, que $a$ soit un maximum local. Pour $h$ réel petit non nul le taux d'accroissement

$$\frac{f(a_1, \dots,\, a_{i-1},\, a_i + h,\, a_{i+1}, \dots,\, a_n) - f(a_1, \dots,\, a_n)}{h}$$

est du signe de $-h$. Sa limite quand $h$ tend vers zéro est $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. D'aprés la proposition 1.2, on en déduit

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a_1, \dots,\, a_{i-1},\, a_i + h,\, a_{i+1}, \dots,\, a_n) - f(a_1, \dots,\, a_n)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Il en résulte que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est négatif ou nul. De même, en considérant $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}}$, on obtient que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est positif ou nul. D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

**Définition 4.3** $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ; $(x_1, \dots,\, x_n) \to f(x_1, \dots,\, x_n)$ *une fonction numérique définie sur $\Omega$ sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle point critique de $f$ un point $x = (x_1, \dots,\, x_n)$ de $\Omega$ tel que*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0.$$

**Exemple :** Soit $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$ et $f : A \to \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 - 5x_1 - 6x_2.$$

Cette fonction $f$ est la restriction à $A$ d'une fonction polynomiale. Elle est donc continue. L'ensemble $A$ est bornée par définition. Considèrons l'application polynomiale (donc continue)

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ (x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2.$$

Nous remarquons que $A = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ g(x_1,\, x_2) \in [0,\, 2]\}$. Comme $[0,\, 2]$ est un ensemble fermé dans $\mathbb{R}$, il résulte de la proposition 5.1 que $A$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, $A$ est fermé et borné, il résulte du théorème 5.3 que $f$ admet un maximum et un minimum. Si un extremum est atteint en un point $a = (a_1,\, a_2)$ de la boule ouverte

$$B(0,\, \sqrt{2}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 < 2\},$$

comme $f$ admet des dérivées partielles sur $B(0, \sqrt{2})$ le point $a$ serait un point critique de $f$. Donc le point $a = (a_1, a_2)$ vérifieraient

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6 = 0. \end{cases}$$

Or ce système linéaire a une unique solution $(2,\, 1)$ qui n'est pas dans $B(0,\, \sqrt{2})$. On peut ainsi conclure que $f$ a bien un maximum et minimum et que ces valeurs sont atteintes sur le bord de $A$

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 = 2\}.$$

Retour aux fonctions numériques d'une seule variable :

**Théorème 4.4** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a < b$ ($a$ peut être $-\infty$ et $b$ peut être $+\infty$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $]a,\, b[$.*

*1) $f$ est constante si et seulement si pour tout $t \in ]a,\, b[$, $f'(t) = 0$.*

*2) $f$ est croissante si et seulement si pour tout $t \in ]a,\, b[$, $f'(t) \geq 0$.*

*3) $f$ est décroissante si et seulement si pour tout $t \in ]a,\, b[$, $f'(t) \leq 0$.*

**Corollaire 4.5** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a < b$ ($a$ peut être $-\infty$ et $b$ peut être $+\infty$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur $I$ et dérivable sur $]a,\, b[$. Si exepté pour un nombre fini de valeurs $t$ de $]a,\, b[$, $f'(t) > 0$ (resp. $f'(t) < 0$), alors $f$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante).*

Pour $n \geq 2$, il n'y a pas d'ordre naturel sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, on ne peut pas parler de fonctions numériques croissantes de plusieurs variables. Par contre, notons la remarque importante suivante :

**Remarque 4.6** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et

$$f : \Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathbb{R}$$

une fonction de plusieurs variables. Supposons que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ existe sur $\Omega$ et soit strictement positive sur $\Omega$. Alors, il résulte de la définition des dérivées partielles que, à $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ fixées, la fonction :

$$x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

est croissante sur tout intervalle où elle est définie.

**Exemple :** Considérons la fonction :

$$(\mathbb{R}^+ - \{0\})^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad (p_1, p_2, r) \mapsto \frac{p_2 r}{p_1(p_1 + p_2)} \quad .$$

La fonction $f$ est une fonction rationnelle définie sur l'ouvert $(\mathbb{R}^+ - \{0\})^3$ de $\mathbb{R}^3$. Nous avons pour $(p_1, p_2, r)$ dans cet ouvert :

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}(p_1, p_2, r) = -\frac{p_2 r(2p_1 + p_2)}{p_1^2(p_1 + p_2)^2} < 0.$$

Donc quand $p_2$ et $r$ sont fixées, la fonction $f$ est une fonction décroissante en $p_1$. Imaginez que $p_1$ soit le prix d'un produit 1, $p_2$ soit le prix d'un produit 2, $r$ le revenu d'un consommateur et $f$ la demande du produit 1. Pour ce modèle, la conclusion est que quand le prix du produit 1 augmente et que le prix du produit 2 et du revenu sont fixes, la demande du produit 1 diminue.

**Proposition 4.7** *Soit $a < b$ deux réels et $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe un réel $t_0 \in ]a, b[$ tel que $f'(t_0) = 0$.*

*1) Si $f$ admet une dérivée seconde sur $]a, b[$ et que pour tout $t \in ]a, b[$, $f''(t) \geq 0$ (resp. $\leq$), alors $f(t_0)$ est le minimum (resp. maximum) de la fonction $f$.*

*2) Si $f$ admet une dérivée seconde en $t_0$ et que $f''(t_0) > 0$ (resp. $<$), alors $f(t_0)$ est un minimum (resp. maximum) local de $f$.*

**Démonstration :** Le point 1) se montre à l'aide du tableau de variation de $f$. Le point 2 sera vu au semestre suivant.

## 5 Fonctions homogènes :

**Exemple :** Considérons la fonction :

$$h : (\mathbb{R}^+ - \{0\})^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1,\, x_2) \mapsto h(x_1,\, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/3}.$$

Sur l'ouvert $(\mathbb{R}^+ - \{0\})^2$ de $\mathbb{R}^2$, la fonction $h$ est tout d'abord continue. C'est en effet la composée de l'application continue :

$$f : (\mathbb{R}^+ - \{0\})^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1,\, x_2) \mapsto f(x_1,\, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

par l'application continue :

$$g : \mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto g(x) = x^{1/3}.$$

D'autre part la fonction $h$ admet des dérivées partielles et nous avons pour tout $(x_1,\, x_2) \in (\mathbb{R}^+ - \{0\})^2$ :

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = \frac{2}{3} x_1 (x_1^2 + x_2^2)^{-2/3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \frac{2}{3} x_2 (x_1^2 + x_2^2)^{-2/3}.$$

Ces dérivées partielles sont continues sur $(\mathbb{R}^+ - \{0\})^2$ comme produit de fonctions continues.

Observons que si $(x_1,\, x_2) \in (\mathbb{R}^+ - \{0\})^2$, c'est-à-dire que si $(x_1,\, x_2)$ est un couple de réels strictement positifs et si $\lambda$ est un réel strictement positif, nous avons toujours $\lambda(x_1,\, x_2) \in (\mathbb{R}^+ - \{0\})^2$. On dira que $(\mathbb{R}^+ - \{0\})^2$ est un cône strictement positif.

Nous avons alors pour tout $(x_1,\, x_2) \in (\mathbb{R}^+ - \{0\})^2$ et $\lambda > 0$ :

$$\begin{aligned} h(\lambda x_1,\, \lambda x_2) &= ((\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2)^{1/3}, \\ &= (\lambda^2 (x_1^2 + x_2^2))^{1/3}, \\ &= \lambda^{2/3} h(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Nous dirons (voir la définition 5.2) que $h$ est homogène de degré $2/3$. Enfin, nous pouvons remarquer que pour tout $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^+ - \{0\})^2$ :

$$\begin{aligned} x_1 \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \tfrac{2}{3} x_1^2 (x_1^2 + x_2^2)^{-2/3} + \tfrac{2}{3} x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)^{-2/3} \\ &= \tfrac{2}{3} (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)^{-2/3} \\ &= \tfrac{2}{3} f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

**Définition 5.1** *Un sous-ensemble $C$ de $\mathbb{R}^n$ est un cône positif si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ : $(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \in C$.*

Géométriquement, un cône positif est exactement un sous-ensemble stable par homothétie de centre l'origine de $\mathbb{R}^n$ et de rapport positif.

**Définition 5.2** *Soit $C$ cône positif de $\mathbb{R}^n$ et $k$ un réel. Soit :*

$$f : C \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n).$$

*La fonction $f$ est dite $k$-homogène ou homogène de degré $k$ si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in C$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ :*

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n).$$

**Proposition (identité d'Euler) 5.3** *Soit $C$ un cône positif de $\mathbb{R}^n$ que nous supposons ouvert. Soit :*

$$f : C \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, \ldots, x_n) \to f(x_1, \ldots, x_n) \; .$$

*admettant des dérivées partielles continues. Alors $f$ est $k$-homogène si et seulement si pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C$ :*

$$kf(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$$

**Démonstration :** Supposons $f$ homogène de degré $k$. Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in C$ et $\lambda > 0$, nous avons donc :

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n).$$

Dérivons par rapport à $\lambda$ cette fonction des $n+1$ variables $\lambda, x_1, \ldots, x_n$ . Nous obtenons :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = k\lambda^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Il reste à prendre $\lambda = 1$. Inversement, si pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C$ :

$$kf(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x).$$

Fixons $(x_1, \ldots, x_n) \in C$ et considérons la fonction :

$$g : \mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \quad , \quad \lambda \mapsto g(\lambda) = f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

On vérifie que $g$ est dérivable et que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ :

$$g'(\lambda) = k\lambda g(\lambda).$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante $c$ telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad : \quad \frac{g(\lambda)}{\lambda^k} = c.$$

En effet la dérivée de la fonction $\dfrac{g(\lambda)}{\lambda^k}$ est nulle sur $\mathbb{R}^+ - \{0\}$. En prenant $\lambda = 1$, nous obtenons $c = f(x_1, \ldots, x_n)$. Nous avons ainsi montré que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in C$ :

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, \ldots, x_n).$$

**Remarque 5.4** Sous les hypothèses de la proposition, on peut montrer que les dérivées partielles de $f$ sont homogènes de degré $k - 1$.

**Exemple :** Considérons la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + 17x_1x_2 + x_2^2}{(x_1 + x_2)^2}.$$

Le fonction $f$ est une fraction rationnelle définie sur :

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_1 + x_2 \neq 0\}.$$

L'ensemble $A$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car $\mathbb{R} - \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et que la fonction polynomiale $x_1 + x_2$ est continue (voir proposition 5.1 du chapitre II) . On vérifie facilement que c'est un cône positif. Pour tout $(x_1, x_2) \in A$ et $\lambda > 0$, nous avons :

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{\lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_1 x_2 + \lambda^2 x_2^2}{(\lambda x_1 + \lambda x_2)^2} = f(x_1, x_2).$$

Ainsi, la restriction de $f$ à $A$ est homogène de degré 0. Comme $f$ est une fraction rationnelle, elle admet des dérivées partielles continues aux points où elle est définie. Nous avons donc pour tout $(x_1, x_2) \in A$ (l'identité d'Euler) :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0.$$

# IV Fonctions usuelles

## 1 Fonctions exponentielle et logarithme

**Proposition (existence de la fonction exponentielle) 1.1** *Il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \; .$$

*Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée :*

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto \exp(x) = e^x \; .$$

Une propriété essentielle de la fonction exponentielle est :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad , \quad e^{x+y} = e^x e^y \; .$$

Il en résulte que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives et est strictement croissante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad , \quad x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < e^x < e^y \; .$$

La fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$. On peut alors montrer que l'application :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad : \quad x \mapsto e^x$$

est bijective. C'est à dire que pour tout réel $y > 0$, il existe un unique réel $x$ tel que $e^x = y$.

Le réel $e^1$, valeur de la fonction exponentielle en 1, est noté $e$. Ce n'est pas un nombre rationnel. Le début de son développement décimal est de 2,71828182846.... .

**Proposition (existence de la fonction logarithme) 1.2** *Il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(1) = 0 \; .$$

*Cette fonction est appelée fonction logarithme néperien ou logarithme et notée :*

$$\ln : \mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto \ln x \; .$$

Une propriété essentielle de la fonction logarithme est :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad , \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \; .$$

La fonction logarithme est strictement croissante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad x < y \quad \Rightarrow \quad \ln x < \ln y \; .$$

La fonction logarithme dérivable sur $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ est donc continue. On peut alors montrer que l'application :

$$\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto \ln x$$

est bijective. C'est à dire que pour tout réel $y$, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $\ln x = y$.

Les fonctions logarithme et exponentielle sont liées. En effet, les deux applications bijectives :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad : \quad x \mapsto e^x$$

et

$$\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto \ln x$$

sont inverses l'une de l'autre. C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad : \quad e^{\ln x} = x \; .$$

Pour tout réel $a$, à l'aide de la fonction logarithme, nous pouvons définir la fonction puissance $a$.

**Définition (fonction puissance) 1.3** *Soit $a$ un nombre réel. Nous appelons fonction puissance $a$ la fonction :*

$$\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto x^a := e^{a \ln x} \; .$$

Si $a$ rationnel, cette fonction $x \mapsto x^a$ généralise bien la fonction puissance usuelle. Par exemple pour tout $x > 0$, $x.x = x^2 = e^{2 \ln x}$ et $\sqrt{x}$ l'unique réel positif dont le carré est $x$ est bien égal à $x^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \ln x}$.

La fonction puissance $a$ :

$$\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto x^a \ .$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ comme composée d'applications dérivables. Nous obtenons que sa dérivée est la fonction :

$$\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto ax^{a-1} \ .$$

On pourra écrire : $(x^a)' = ax^{a-1}$.

Pour tout $a$ réel, nous avons :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad , \quad (xy)^a = x^a y^a \ .$$

La fonction puissance $a$ est à valeurs strictement positives et est strictement croissante. L'application :

$$\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad : \quad x \mapsto x^a \ .$$

est bijective. Son inverse est l'application :

$$\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad : \quad x \mapsto x^{\frac{1}{a}} \ .$$

Signalons enfin que pour tout $a$, $b$ réels nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad , \quad (x^a)^b = x^{ab} \quad \text{et} \quad x^a \, x^b = x^{a+b}$$

En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{0\} \quad , \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

## 2 Fonctions trigonométriques

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ le cercle $S$ de centre 0 et de rayon 1 :

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1\} \ .$$

La longueur de $S$ est le nombre $2\pi$. Le nombre $\pi$ n'est pas rationnel. Le début de son dévelopement décimal est $3,1415926535...$ ("que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages ...")

Soit $x \geq 0$ un réel. Parcourons la distance $x$ sur le cercle $S$ à partir du point $A = (1, 0)$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On arrive à un point $M(x) \in S$. Soit $x \leq 0$ un réel. Parcourons la distance $x$ sur le cercle $S$ à partir du point $A = (1, 0)$ dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour tout $x$ réel, nous venons de définir un point $M(x)$ dont nous notons $M(x) = (\cos x, \sin x)$ les coordonnées. Nous appelons cosinus la fonction :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto \cos x$$

et sinus la fonction :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto \sin x$$

Pour tout $x$ réel, nous avons par définition : $(\cos x, \sin x) \in S$ et donc :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \quad , \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \ .$$

**Proposition 2.1** *Les fonctions cosinus et sinus sont continues, dérivables. La dérivée de la fonction cosinus est la fonction* $-\sin$ *et celle de la fonction sinus est la fonction* $\cos$*.*

Nous avons pour tout réel $x$ et pour tout entier $k$ :

$$\begin{array}{lcl}
\cos(x + 2k\pi) = \cos x & , & \sin(x + 2k\pi) = \sin x \\
\cos(x + \pi) = -\cos x & , & \sin(x + \pi) = -\sin x \\
\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x & , & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \\
\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x & , & \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x
\end{array}$$

Indiquons quelques valeurs particulières.

$$\begin{array}{lcl}
\cos 0 = 1 & , & \sin 0 = 0 \\
\cos \frac{\pi}{2} = 0 & , & \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\
\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} & , & \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} & , & \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} & , & \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{array}$$

# V Graphes et lignes de niveaux

## 1 Etudes de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$

Sur un plan euclidien, nous choisissons un repère orthonormé qui l'identifie à $\mathbb{R}^2$. Si $M = (a_1, a_2)$ et $N = (b_1, b_2)$ sont deux points du plan, rappelons que la distance de $M$ à $N$ est :

$$d(M, N) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

**1) Droite du plan :**

Soit $D$ une droite du plan. Nous savons qu'il existe trois réels $(a, b, c)$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ tels que $D$ soit l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x_1, x_2)$ tels que :

$$ax_1 + bx_2 = c.$$

Nous dirons que $ax_1 + bx_2 = c$ est une équation de $D$.

Une droite peut avoir plusieurs équations . Par exemple, la droite d'équation $x_1 - x_2 = 2$ est aussi la droite d'équation $2x_1 - 2x_2 = 4$.

**Représentation graphique de la droite $D$ d'équation $ax_1 + bx_2 = c$ :**

<u>Cas $b = 0$ :</u> La droite $D$ a pour équation $x_1 = \dfrac{c}{a}$. Elle est parallèle à l'axe des ordonnées (droite verticale).

<u>Cas $a = 0$ :</u> La droite $D$ a pour équation $x_2 = \dfrac{c}{b}$. Elle est parallèle à l'axe des abscisses (droite horizontale).

<u>Cas $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ :</u> La droite $D$ a pour équation $ax_1 + bx_2 = 0$. Elle passe par l'origine $(0, 0)$ et par le point $C = (-b, a)$. La droite $D$ est donc la droite $(OC)$.

<u>Cas $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ :</u> La droite $D$ passe par les points $A = (\dfrac{c}{a}, 0)$ et le point $B = (0, \dfrac{c}{b})$ qui sont distincts. La droite $D$ est donc la droite $(AB)$.

Qand $c$ varie les droites d'équations $ax_1 + bx_2 = c$ forment une famille de droites parallèles.

**Proposition 1.1** *Les droites d'équation $ax_1 + bx_2 = c$ et $a'x_1 + b'x_2 = c'$ sont parallèles si et seulement si $ab' - ba' = 0$.*

**Exercice :** Trouver $m$ pour que la droite $D(m)$ d'équation $2x_1 + mx_2 = 7$ soit parallèle à la droite d'équation $x_1 + 2x_2 = 4$. Réponse : $m = 4$.

**Exemple de variations des coefficients :**

Supposons que $a$, $b$ et $c$ soient trois réels strictement positifs. Fixons $b$ et $c$ et considérons la droite $D(a)$ d'équation $ax_1 + bx_2 = c$. Pour $0 < a' < a < a''$ la situation des droites $D(a')$, $D(a)$ et $D(a'')$ est donnée par le dessin ci-dessous :

**Dessin**

**Equation réduite d'une droite :**

Pour $b \neq 0$, la droite d'équation $ax_1 + bx_2 = c$ a aussi pour équation :

$$x_2 = -\frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b}.$$

Cette équation est appelée équation réduite de $D$. Le réel $-\dfrac{a}{b}$ est aussi appelé la pente de $D$.

**Demi plan délimité par une droite :**

Soit $D$ la droite d'équation $x_1 - 2x_2 = 2$. Représenter :

$$A = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x_1 - 2x_2 > 2\}.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 > 2, \\ 2x_2 > 2 - x_1, \\ x_2 < -1 + \dfrac{1}{2}x_1. \end{array}$$

L'ensemble $A$ est l'ensemble hachuré dans le dessin ci-dessous :

**dessin :**

L'ensemble $A$ est appelé demi-plan délimité par $D$.

**2) Segment du plan :**

Soit $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ deux points du plan. Le segment $AB$ est l'ensemble des points $M$ de coordonnées $(x_1, x_2)$ tels qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ vérifiant :

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1, \\ x_2 &= \lambda a_2 + (1 - \lambda) b_2. \end{aligned}$$

Ainsi, les coordonnées de $M$ sont une moyenne pondérée des coordonnées de $A$ et $B$.

**Définition 1.2** *(ensemble convexe dans $\mathbb{R}^n$) Un sous-ensemble $X$ de $\mathbb{R}^n$ est dit convexe si dès que deux points $A = (a_1, \ldots, a_n)$ et $B = (b_1, \ldots, b_n)$ sont dans $X$, alors pour tout $\lambda \in [0, 1]$ :*

$$(\lambda a_1 + (1 - \lambda) b_1 \ldots, \lambda a_n + (1 - \lambda) b_n) \in X.$$

Autrement dit un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^n$) est convexe si dès qu'il contient deux points, il contient le segment d'extrémités ces deux points.

**Exemple :** Un demi-plan de $\mathbb{R}^2$ est convexe.

**2) Cercle :**

Soit $R > 0$ un réel et $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$ un point de $\mathbb{R}^2$. Le cercle $C$ de centre $\Omega$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M = (x_1, x_2)$ du plan vérifiant :

$$d(M, \Omega) = R$$

ou :

$$\sqrt{(x_1 - \omega_1)^2 + (x_2 - \omega_2)^2} = R,$$

ou encore :

$$(x_1 - \omega_1)^2 + (x_2 - \omega_2)^2 = R^2.$$

**Exercice :** Montrer que l'ensemble $E$ des points $M = (x_1,\, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation : $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2 + x_1 = 3$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Solution :** Les équations suivantes sont équivalentes :

$$
\begin{aligned}
&2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2 + x_1 = 3,\\
&x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 = \frac{3}{2},\\
&(x_1 + \frac{1}{4})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2},\\
&(x_1 + \frac{1}{4})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{29}{16}.
\end{aligned}
$$

L'ensemble $E$ est donc le cercle de centre $-\frac{1}{4},\, \frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{\sqrt{29}}{4}$.

Montrer que l'ensemble $E'$ des points $M = (x_1,\, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant l'équation :

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2 + x_1 < 3$$

est le disque (sans son bord) de centre $(-\frac{1}{4},\, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{29}}{4}$.

Les équations suivantes sont équivalentes :

$$
\begin{aligned}
&2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2 + x_1 < 3,\\
&x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 < \frac{3}{2},\\
&(x_1 + \frac{1}{4})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} < \frac{3}{2},\\
&(x_1 + \frac{1}{4})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 < \frac{29}{16}.
\end{aligned}
$$

Donc $E'$ est l'ensemble des points situés à une distance strictement inférieure à $\frac{\sqrt{29}}{4}$ du point $(-\frac{1}{4},\, \frac{1}{2})$. On peut montrer que cet ensemble est un ouvert, borné et convexe de $\mathbb{R}^2$.

**Ellipse :**

Soit $0 < c < a$ deux réels strictement positifs. Notons $F = (c,\, 0)$ et $F' = (-c,\, 0)$. Nous appelons ellipse de foyer $F$ et $F'$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$d(M,F) + d(M,F') = 2a.$$

On peut vérifier que cet ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x_1,\, x_2)$ vérifient l'équation :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{où} \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

**Exercice :** Montrer que l'ellipse $\mathcal{E}$ est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$.

**Solution :** Considérons l'application polynomiale, donc continue :

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad , \quad (x_1,\, x_2) \mapsto \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}.$$

Par définition :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad f(x_1, x_2) = 1\}, \\ & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad f(x_1, x_2) \in \{1\}\}. \end{array}$$

Comme l'ensemble $\{1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ et que $f$ est continue, il résulte de la proposition 5.1 du chapitre II que $\mathcal{E}$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

Si $(x_1,\, x_2) \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\frac{x_1^2}{a^2} \leq \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \quad \text{et donc } x_1^2 \leq a^2.$$

De même, $x_2^2 \leq b^2$. Ainsi, $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq a^2 + b^2$. L'ellipse $\mathcal{E}$ est donc contenue dans le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$. Elle est donc bornée.

Pour dessiner l'ellipse $\mathcal{E}$, on peut fixer une corde de longueur $2a$ aux foyers $F$ et $F'$ et se deplacer la corde tendue autour de $F$ et $F'$. Plus algébriquement, on peut remarquer que l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le demi-plan $x_2 \geq 0$ est donnée par l'équation :

$$x_2 = b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} \quad \text{et} \quad -a \leq x_1 \leq a.$$

La représentation de l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le demi-plan $x_2 \geq 0$ s'obtient donc en étudiant la fonction :

$$[-a, a] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad , \quad x_1 \mapsto x_2 = f(x_1) = b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}.$$

La fonction $f$ est dérivable sur $]-a, a[$ et pour tout $x_1 \in ]-a, a[$ :

$$f'(x_1) = \frac{b}{a^2} \frac{x_1}{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}.$$

Le tableau de variation de $f$ est :

**tableau**

D'où la représentation de l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le demi-plan $x_2 \geq 0$ :

**dessin**

Pour obtenir la représentation graphique de $\mathcal{E}$, il reste à remarquer que $\mathcal{E}$ est invariant sous l'action de la symétrie orthogonal d'axe celui des abscisses ; c'est-à-dire :

$$(x_1, x_2) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (x_1, -x_2) \in \mathcal{E}.$$

**Remarque :** On pourra montrer que l'intérieur de l'ellipse caractérisée par l'inéquation :

$$d(M, F) + d(M, F') < 2a \quad \text{ou} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1$$

est une ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.

**Hyperbole :**

Soit $0 < a < c$ deux réels strictement positifs. Notons $F = (c, 0)$ et $F' = (-c, 0)$. Nous appelons hyperbole de foyer $F$ et $F'$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que :

$$\mid d(M, F) - d(M, F') \mid = 2a.$$

On peut vérifier que cet ensemble $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points $M$ dont les coordonnées $(x_1,\, x_2)$ vérifient l'équation :

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{où} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Ainsi, l'intersection de $\mathcal{H}$ avec le demi-plan $x_1 \geq 0$ est l'ensemble des points $M = (x_1,\, x_2)$ vérifiant l'équation :

$$x_1 = a\sqrt{\frac{x_2^2}{b^2} + 1}$$

et cette intersection s'obtient dons par l'étude de la fonction :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad , \quad x_1 \mapsto x_1 = g(x_2) = b\sqrt{\frac{x_2^2}{b^2} + 1}.$$

La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x_2$ réel :

$$g'(x_2) = \frac{a}{b^2} \frac{x_2}{\sqrt{\frac{x_2^2}{b^2} + 1}}.$$

Le tableau de variation de $g$ est :

**dessin :**

De plus, $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} \dfrac{g(x_2)}{x_2} = \dfrac{a}{b}$, $\lim\limits_{x_2 \to -\infty} \dfrac{g(x_2)}{x_2} = -\dfrac{a}{b}$, $\lim\limits_{x_2 \to +\infty} g(x_2) - \dfrac{a}{b}x_2 = 0$ et $\lim\limits_{x_2 \to -\infty} g(x_2) + \dfrac{a}{b}x_2 = 0$. Donc, la courbe représentative de $g$ a en $+\infty$ (resp. $-\infty$) la droite d'équation $x_1 - \dfrac{a}{b}x_2 = 0$ (resp. $x_1 + \dfrac{a}{b}x_2 = 0$) comme asymptote. On obtient la représentation de $\mathcal{H}$ :

**dessin :**

**Parabole :**

Considérons dans le plan la droite $D$ d'équation $x_1 = p$ où $p > 0$ est un réel. L'ensemble $\mathcal{P}$ des points $M = (x_1,\, x_2)$ tels que la distance de $M$ à la droite soit égale à la distance de $M$ à l'origine est appelé une parabole. Traduisons que $M = (x_1, x_2)$ appartient à $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned}&(x_1 - p)^2 = x_1^2 + x_2^2,\\&-2x_1p + p^2 = x_2^2,\\&x_1 = -\frac{1}{2p}x_2^2 + \frac{p}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, une parabole est l'ensemble des points vérifiant :

$$-2x_1p + p^2 = x_2^2.$$

La parabole $\mathcal{P}$ est donc la courbe représentative de la fonction :

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x_2 \mapsto h(x_2) = -\frac{1}{2p}x_2^2 + \frac{p}{2}.$$

La fonction $h$ est dérivable. Pour tout $x_2$ réel :

$$h'(x_2) = -\frac{x_2}{2p}.$$

La fonction $h$ est paire et $\mathcal{P}$ admet donc l'axe des $x_1$ comme axe de symétrie. Le tableau de variation de $h$ est donc : Enfin, $\lim_{x_2 \to +\infty} \frac{h(x_2)}{x_2} = \infty$. Nous en déduisons l'allure de la courbe représentative de $\mathcal{P}$.

**dessin :**

**Coniques :**

Considérons des réels $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $f$ tels que $a$, $b$, $c$ ne soient pas simultanément nuls. Alors, on peut montrer que l'ensemble des points $(x_1, x_2)$ vérifiant l'équation :

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

est soit vide, soit un cercle, soit une ellipse, soit une hyperbole ou la réunion de deux droites. Ces ensembles sont appelés les *coniques* du plan.

## 2 Graphe d'une fonction numérique d'une variable

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $c < d$ ($c$ ou $d$ pouvant être respectivement $+\infty$ où $-\infty$).

**Définition 2.1** *Soit une fonction* $f : I \to \mathbb{R}\ ,\ x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$*. Le sous-ensemble de* $\mathbb{R}^2$ *:*

$$G_f = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x_1 \in I \quad \text{et} \quad x_2 = f(x_1)\}$$

*est appelé le graphe de* $f$*.*

**Exemple :** Considérons la fonction :

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad , \quad x_1 \mapsto x_2 = \frac{1}{x_1}.$$

La fonction $f$ est décroissante. Nous avons :

$$\lim_{x_1 \to 0^+} f(x_1) = \lim_{x_1 \to 0^-} f(x_1) = 0.$$

Nous obtenons l'allure de $G_f$ :

**dessin :**

L'étude d'une fonction $f$ et notamment de son tableau de variation permet de donner l'allure de $G_f$ et de le représenter graphiquement.

Inversement, si $G$ est le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}\ ,\ x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$, la donnée de $G$ permet de retrouver $f$. D'une part, $I$ est la projection de $G$ sur l'axe des abscisses parallélement à l'axe des ordonnées. D'autre part, soit $x_1 \in I$, nous avons $(x_1,\, f(x_1)) \in G$ et si $(x_1,\, x_2) \in G$, alors $x_2 = f(x_1)$. Autrement écrit, si $x_1 \in I$, $G$ contient un seul point d'abscisse $x_1$. L'ordonnnée de ce point est $f(x_1)$.

Les données de $f$ et de son graphe étant équivalente, nous disons aussi que le graphe de $f$ est la courbe repésentative de $f$.

**Exemple :** Le cercle $C$ de centre $(0,\, 0)$ et de rayon $1$ n'est pas la courbe représentative d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}\ ,\ x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$. En effet il y a sur $C$ des points distincts ayant même abscisse. Par contre les points de $C$ d'ordonnée positive sont le graphe de la fonction :

$$[-1,\, 1] \to \mathbb{R} \quad , \quad x_1 \mapsto \sqrt{1 - x_1^2}.$$

Au graphe $G_f$ d'une fonction $f$, nous pouvons associer naturellement quatre sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}
A &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1 \in I \quad \text{et} \quad x_2 > f(x_1)\},\\
B &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1 \in I \quad \text{et} \quad x_2 < f(x_1)\},\\
C &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1 \in I \quad \text{et} \quad x_2 \geq f(x_1)\},\\
D &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1 \in I \quad \text{et} \quad x_2 \leq f(x_1)\}.
\end{aligned}$$

L'ensemble $A$ est l'ensemble des points situés strictement au-dessus du graphe de $f$, $B$ celui des points strictement en-dessous, $C$ celui des points au-dessus et $D$ celui des points au-dessous.

L'ensemble $C$ est appelé l'*épigraphe* de la fonction $f$ et l'ensemble $D$ est appelé l'*hypographe*.

**Exercice :** On pourra montrer que si $I$ est fermé (par exemple $I = \mathbb{R}$ ou $I = [c,\, d]$) et que $f$ est continue, alors le graphe de $f$ et les ensembles $C$ et $D$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.

**Tangente aux points d'un graphe :**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ , $x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$. une fonction et $A = (a,\, f(a)) \in G_f$. Considérons alors $B = (b,\, f(b)) \in G_f$ un point différent de $A$. La droite $(AB)$ est appelé une sécante au graphe en $A$. Son équation est :

$$x_2 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a) + f(a).$$

Sa pente est $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Si $f$ est dérivable en $a$, $f$ est alors continue en $A$ et on peut montrer que :

$$\lim_{B \to A, B \in G_f, B \neq A} \text{pente de } AB = \lim_{x_1 \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a).$$

Ainsi, lorsque $B$ tend vers $A$ la sécante $(AB)$ tend vers la droite déquation :

$$x_2 = f'(a)(x_1 - a) + f(a)$$

appelée tangente en $(a,\, f(a))$ à $G_f$.

**Définition 2.2** *Si $f$ est dérivable en $a$, la droite d'équation :*

$$x_2 - f(a) = f'(a)(x_1 - a)$$

*est appelé la tangente en $(a,\ f(a))$ à $G_f$.*

La tangente en $(a,\ f(a))$ à $G_f$ est encore la droite de pente $f'(a)$ passant par le point $(a,\ f(a))$.

**Position du graphe d'une fonction et d'une droite sécante :**

Nous souhaitons préciser la position d'une droite $D$ sécante au graphe $G_f$ d'une fonction $f$. Si la droite $D$ est contenue dans l'ensemble des points situés au-dessus de $G_f$ nous disons qu'elle est au-dessus du graphe de $f$, si elle est dans l'ensemble des points situés en-dessous de $G_f$, nous disons qu'elle est en-dessous du graphe de $f$, si elle n'est contenue dans aucun de ces sous-ensembles nous disons qu'elle traverse le graphe de $f$.

**Proposition 2.3** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $c < d$.*
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in ]c, d[$. Alors, si une droite $D$ passant par $(a,\ f(a))$ est du même côté du graphe de $f$, c'est que $D$ est la tangente au graphe de $f$ en $(a,\ f(a))$.*

**Démonstration :** Si la droite $D$ est verticale, il est clair qu'elle traverse le graphe de $f$. Considérons alors une droite $D$ passant par $(a,\ f(a))$ et non verticale. Soit $p$ sa pente, l'équation de $D$ est alors :

$$x_2 = p(x_1 - a) + f(a).$$

Supposons par exemple que $D$ soit au-dessus du graphe de $f$. Pour tout $x_1 \in I$, nous avons donc :

$$p(x_1 - a) + f(a) \geq f(x_1)$$

Considérons la fonction $g : I \to \mathbb{R}\ ,\ x_1 \mapsto p(x_1 - a) + f(a) - f(x_1)$. Cette fonction est donc à valeurs positives. Elle s'annule en $a$ car la droite $D$ passe par le point $(a,\ f(a))$. Ainsi, $g$ admet un minimum en $a$. Comme $g$ est dérivable en $a$, il résulte de la proposition 4.2 du chapitre III que $g'(a) = 0$. Nous en déduisons $p = f'(a)$. Cela montre que $D$ est la tangente au graphe de $f$ en $(a, f(a))$.

**Proposition 2.4** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $c < d$.*
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée seconde positive (resp. négative) une fonction sur $]c,\, d[$. Alors, les tangentes au graphe de $f$ sont en-dessous (resp. au-dessus) du graphe de $f$.*

**Démonstration :** La tangente au graphe de $f$ en $(a,\, f(a))$ est en-dessous (resp. au-dessus) du graphe de $f$ si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ :

$$g(x_1) = f'(a)(x_1 - a) + f(a) - f(x_1) \geq 0 \quad \text{(resp. } \leq 0\text{)}.$$

La proposition résulte alors de l'étude du tableau de variation de la fonction $g$.

**Position relative des graphes de deux fonctions :**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Nous disons plus généralement que le graphe de $g$ est au-dessus de celui de $f$ (resp. en-dessous) si le graphe de $g$ est contenu dans l'ensemble des points situés au-dessus du graphe de $f$ (resp. en-dessous). Le graphe de $f$ est alors en-dessous de celui de $g$ (resp. au-dessus). Les propositions précedentes se généralisent.

**Proposition 2.5** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $c < d$.*
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en un point $a \in ]c,\, d[$ tels que $f(a) = g(a)$. Alors, si le graphe de $g$ est au-dessus ou en-dessous de celui de $f$, c'est que les graphes de $f$ et $g$ ont la même tangente en $(a,\, f(a))$.*

**Proposition 2.6** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $c < d$.*
*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant des dérivées secondes telles que $f'' - g''$ soit positive (resp. négative) sur $]c, d[$. Soit $a \in ]c, d[$ tel que $f'(a) = g'(a)$ et $f(a) = g(a)$ (autrement dit le graphe de $f$ et de $g$ s'intersectent en $(a,\, f(a))$ et ont même tangente en ce point. Alors le graphe de $f$ est au-dessus de celui de $g$ (resp. en-dessous).*

**Fonction convexe d'une variable :**

**Définition 2.7** *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ est dite convexe si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*
*1) l'épigraphe (la partie située au-dessus du graphe) de $f$ est convexe,*
*2) pour tout $x,\, y \in I$ et $\lambda \in [0,\, 1]$ :*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

*Si l'hypographe (la partie située en-dessous du graphe) de $f$ est convexe, on dit alors que $f$ est concave. Cela équivaut à demander que pour tout $x$, $y \in I$ et $\lambda \in [0,\, 1]$ :*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

**Proposition 2.8** *Si $f$ est convexe et dérivable en un point $a$, alors la tangente en $(a,\, f(a))$ au graphe de $f$ est en-dessous du graphe de $f$.*

**Proposition 2.9** *Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert $I$ et deux fois dérivables sur $I$. Alors, $f$ est convexe si et seulement si $f''$ est positive sur $I$.*

**Exemple :** La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $x \mapsto 2x^2 - x + 1$ est convexe.

**Lignes de niveau d'une fonction numérique de deux variables :**

Soit $U$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Nous appelons ligne de niveau de $f$ tout sous-ensemble de $U$ définie par l'équation $f(x_1, x_2) = k$ où $k$ est un réel fixé.

**Exemple :** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$.
Les lignes de niveaux de $f$ sont les ensembles d'équation :

$$x_1^2 + 2x_2^2 = k.$$

Ils correspondent à :

$$\begin{cases} \emptyset & \text{pour} \quad k < 0, \\ \{(0,0)\} & \text{pour} \quad k = 0, \\ \text{une ellipse} & \text{pour} \quad k > 0. \end{cases}$$

**Exemple :** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ , $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. Les lignes de niveaux de $f$ sont les droites parallèles de pente $-\dfrac{1}{2}$.

## 3 Théorème des fonctions implicites et extremum avec contrainte (deux variables)

Un problème qui se pose lorsque l'on dispose d'une fonction $f$ est de représenter ses lignes de niveaux. Une méthode est de réussir à exprimer les solutions de l'équation :

$$f(x_1, x_2) = k$$

comme les éléments du graphe d'une fonction de $x_2$ ou de $x_1$. Le théorème suivant nous donne une condition pour que cela soit localement possible.

**Théorème des fonctions implicites 3.1** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ admettant des dérivées partielles continues sur $U$, $k$ un réel et $a = (a_1,\, a_2) \in U$ tel que $f(a_1,\, a_2) = k$.*

*a) Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \neq 0$, il existe $I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $a_1$, un intervalle ouvert $J$ de $\mathbb{R}$ contenant $a_2$ et $g : I \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée continue sur $I$ tels que :*

$$\left\{\begin{array}{l}(x_1, x_2) \in I \times J \\ f(x_1, x_2) = k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x_1 \in I \\ x_2 = g(x_1)\end{array}\right. .$$

*b) Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\, a_2) \neq 0$, il existe $I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $a_1$, un intervalle ouvert $J$ de $\mathbb{R}$ contenant $a_2$ et $h : J \to \mathbb{R}$ admettant une dérivée continue sur $J$ tels que :*

$$\left\{\begin{array}{l}(x_1,\, x_2) \in I \times J \\ f(x_1,\, x_2) = k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x_2 \in J \\ x_1 = h(x_2)\end{array}\right. .$$

Sous les hypothèses précédentes, la limite des sécantes $(ba)$, où $b = (b_1,\, b_2)$ vérifiant $f(b_1,\, b_2) = k$, lorsque $b$ tend vers $a$ coïncide avec la droite d'équation :

$$(x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0 \quad .$$

Cette droite est appelée la tangente en $A$ à l'ensemble d'équation :

$$f(x_1, x_2) = k.$$

Ce théorème permet de donner une condition nécessaire à l'existence d'un extremum d'une fonction numérique $f$ de deux variables sous la contrainte que les valeurs de $f$ vérifient une équation $g(x_1,\, x_2) = 0$.

**Proposition 3.2** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ et admettant des dérivées partielles continues. Soit $k$ un réel, désignons par $H$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ :*

$$H = \{(x_1,\, x_2)\ ;\ x_1,\, x_2 \in U \quad \text{et} \quad g(x_1,\, x_2) = k\}.$$

*Soit $A = (a_1,\, a_2)$ un point de $H$ ( $g(a_1,\, a_2) = k$)) et supposons que la restriction de $f$ à $H$ admette un extremum local en $a$. Alors les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :*

*1)* $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\, a_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,\, a_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\, a_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,\, a_2) = 0$ .

*2) $A = (a_1,\, a_2)$ est un point critique de $g$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a_1,\, a_2,\, \lambda)$ soit un point critique de la fonction :*

$$h : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1,\, x_2,\, \lambda) \mapsto f(x_1,\, x_2) + \lambda(g(x_1,\, x_2) - k).$$

Dans la pratique, ces conditions sont très utiles pour déterminer les extrema locaux de fonctions de deux variables sous une contrainte.

Compte-tenu de la définition de point critique, $a$ est un point critique de $g$ se traduit par

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,\, a_2) = \frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,\, a_2) = 0$$

et l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a_1,\, a_2,\, \lambda)$ soit un point critique de $h$ se traduit par :

$$0 = g(a_1,\, a_2) - k = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,\, a_2) - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,\, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,\, a_2) - \lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,\, a_2).$$

**Remarque 3.3** Ces conditions n'expriment rien d'autre que si elles existent, les tangentes en $(a_1, a_2)$ aux sous-ensembles $H$ et à la ligne de niveau de $f$ : $f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2)$ sont identiques.

## 4 Généralisation à plus de deux variables

Nous allons donner quelques généralisations pour un nombre quelconque de variables des concepts et résultats précédents concernant les graphes de fonctions d'une variable ou les lignes de niveaux de fonctions de deux variables.

**Définition du graphe d'une fonction 4.1** *Soit :*

$$f : U \to \mathbb{R}\ ,\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$$

*une fonction définie sur un sous-ensemble $U$ de $\mathbb{R}^n$. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ :*

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ (x_1, \dots, x_n) \in U \text{ et } x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

*est appelé le graphe de $f$.*

Comme pour les fonctions d'une seule variable, la donnée d'une fonction $f$ et de son graphe sont équivalentes.

L'ensemble $A$ des points situés par exemple strictement au-dessus du graphe de $f : U \to \mathbb{R}$ se définit comme à une variable :

$$A = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ (x_1, \dots, x_n) \in U \text{ et } x_{n+1} > f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

**Définition de l'espace tangent en un point d'un graphe 4.2** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et admettant des dérivées partielles continues sur $U$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$, le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par l'équation polynomiale de degré un :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) + x_{n+1} - f(a) = 0$$

*est appelé espace tangent en $a$ au graphe de $f$.*

Définissons maintenant une fonction convexe dont la source est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.

**Définition 4.3** *Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie sur un sous-ensemble $U$ convexe de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

*1) l'épigraphe (la partie située au-dessus du graphe) de $f$ est convexe,*

*2) pour tout $x$, $y \in U$ et $\lambda \in [0, 1]$ :*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

**Ligne de niveaux d'une fonction numérique de plusieurs variables :**

Soit $U$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Nous appelons ligne de niveau de $f$ tout sous-ensemble de $U$ défini par l'équation $f(x_1, \dots, x_n) = k$ où $k$ est un réel fixé.

Le problème de la représentation des lignes de niveaux d'une fonction dépendant d'un nombre fini de paramètres tient à l'impossibilité de donner des représentations géométriques dans des espaces de grande dimension. Savoir qu'une ligne de niveaux est localement le graphe d'une fonction est très utile. Cela permet paramétrer la ligne de niveaux.

**Théorème des fonctions implicites 4.4** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ admettant des dérivées partielles continues sur $U$, $k$ un réel et $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ tel que $f(a) = k$. Si pour un indice $1 \leq i \leq n$, nous avons $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0$, alors "$f = k$ est localement le graphe d'une fonction de $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$" :*
*Il existe $V$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$ contenant $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$, un intervalle ouvert $J$ de $\mathbb{R}$ contenant $a_i$ et $g : V \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues sur $V$ telles que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in U \times J \\ f(x) = k \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in V \\ x_i = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{array} \right. .$$

Sous les hypothèses précédentes, les limites des sécantes $(ba)$, où $b \in U$ vérifiant $f(b) = k$ , lorsque $b$ tend vers $a$ décrivent l'ensemble d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) = 0$$

appelé espace tangent à $f = k$ en $a$.

Ce théorème permet de donner une condition nécessaire à l'existence d'un extremum d'une fonction numérique $f$ de plusieurs variables sous la contrainte que les valeurs de $f$ vérifient une équation $g(x_1, \dots, x_n) = k$.

**Proposition 4.5** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ et admettant des dérivées partielles continues. Soit $k$ un réel, désignons par $H$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ :*

$$H = \{x \in U \quad \text{tel que} \quad g(x_1, \ldots, x_n) = k\}.$$

*Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un point de $H$ ( $g(a) = k$)) et supposons que $a$ soit extremum local de la restriction de $f$ à $H$. Alors,*

- *soit $a$ est un point critique de $g$,*
- *soit il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(a_1, \ldots, a_n, \lambda)$ soit un point critique de la fonction :*

$$f : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1, \ldots, x_n, \lambda) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda(g(x_1, \ldots, x_n) - k).$$

# 5 Compléments sur les extrema locaux d'une fonction numérique

Considérons $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$. Nous avons vu que si $f$ admet des dérivées partielles continues et que si en $(a_1, a_2) \in U$, $f$ admet un extremum local (sans contrainte), alors $(a_1, a_2)$ est un point critique de $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = 0.$$

Cette condition est une condition nécessaire, elle n'est pas suffisante. Par contre, la proposition suivante donne une condition suffisante non nécessaire.

**Proposition 5.1** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur $U$. Soit $(a_1, a_2) \in U$ un point critique de $f$ tel que :*

$$d = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2))^2 > 0,$$

*alors $f$ admet un extremum local en $(a_1, a_2)$.*

*Si de plus*

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1, a_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1, a_2) > 0,$$

*cet extremum est un minimum local et si $t < 0$, alors on a un maximum local.*

**Exemple :** Soit la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ,\ (x_1,\, x_2) \mapsto f(x_1,\, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + x_2 + 3.$$

La fonction $f$ est polynomiale. Elle admet donc des dérivées partielles de tout ordre continues. Les points critiques de $f$ sont les solutions $(x_1,\, x_2)$ du système d'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = 2x_1 + x_2 + 2 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = x_1 + 2x_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

La seule solution de ce système est $(-1,\, 0)$. Ainsi, $f$ admet $(-1,\, 0)$ comme unique point critique. D'autre part, nous avons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(-1,\, 0) = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(-1,\, 0) = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(-1,\, 0) = 1.$$

Comme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(-1,\, 0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(-1,\, 0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(-1,\, 0)^2 = 3 > 0$$

et comme

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(-1,\, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(-1,\, 0) > 0,$$

il résulte donc de la proposition que $f(-1, 0) = 2$ est un minimum local de la fonction $f$.

Pour une fonction numérique de $n$ variables, nous avons :

**Proposition 5.2** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur $U$. Soit $a \in U$ un point critique de $f$ tel que pour tout $h = (h_1, \ldots,\, h_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul :*

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j > 0 \quad (\text{resp.} < 0) \quad .$$

*alors $f$ possède un minimum local (resp. maximum local) en $a$.*

# VI Exercices de synthèse

**Exercice 1 :**

Nous considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1,\, x_2) \mapsto \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}.$

1) **Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction $f$ ? Montrer que $f$ est continue sur son domaine de définition. Puis montrer que sur l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^2$ où**

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x_1 > 0 \quad \text{et} \quad x_2 > 0\},$$

**la fonction $f$ admet des dérivées partielles continues que l'on déterminera.**

Pour que $f$ soit définie en $(x_1,\, x_2)$, il faut et il suffit que $\sqrt{x_1}$ et $\sqrt{x_2}$ aient un sens. Donc, il faut et il suffit que $x_1$ et $x_2$ soient des réels positifs. Le domaine de définition de $f$ est donc :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0\}.$$

La fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ qui à $(x_1,\, x_2)$ associe $x_1$ est continue comme la restriction d'une application polynomiale. La fonction d'une seule variable de $\mathbb{R}^+$ qui à $x$ associe $\sqrt{x}$ est continue. La fonction composée de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ qui à $(x_1,\, x_2)$ associe $\sqrt{x_1}$ est alors continue. La fonction $f$ est donc continue sur son domaine de définition comme somme d'applications continues.

Considérons $(x_1,\, x_2) \in U$, en particulier $x_1 > 0$. Fixons $x_2$ et considérons la fonction :

$$\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R}\ ,\ x_1 \mapsto \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}.$$

Cette fonction d'une variable est dérivable et admet pour dérivée en $x_1$ :

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}}.$$

Ainsi, $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $x_1$ sur $U$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}}.$$

Cette dérivée partielle est continue sur $U$. En effet, la fonction de $U$ vers $\mathbb{R}$ qui à $(x_1, x_2)$ associe $2\sqrt{x_1}$ est continue sur $U$ et ne s'annule pas.
De même, $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $x_2$ sur $U$ qui vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_2}}.$$

2) **Déterminer les extrema locaux de $f$ atteint en un point de $U$. La fonction $f$ est-elle majorée ou minorée sur $U$ ?**

D'après la proposition III.4.2, si $f$ admet un extremum local en un point $(x_1, x_2)$ de $U$, le point $(x_1, x_2)$ est un point critique de $U$. C'est-à-dire :

$$\frac{1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} = 0.$$

Ce système n'ayant pas de solution, la fonction $f$ n'a donc pas d'extremum local atteint en un point de $U$.

La fonction $f$ n'est pas majorée sur $U$. En effet, pour tout réel $A$, il existe un entier $n$ tel que $f(0, n^2) = n > A$. Par contre, $f$ est minorée par 0 sur $U$ car $f$ est clairement à valeurs positives.

3) **On considére sur $U$ la fonction $g : U \to \mathbb{R}$ , $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + 2x_2$. Soit $k$ un réel strictement positif. Posons $H$ l'ensemble défini par**

$$H = \{(x_1, x_2) \in U \ ; \ x_1 + 2x_2 = k\},$$

**qui est l'intersection de la droite $D$ d'équation $x_1 + 2x_2 = k$ avec $U$.**

**Donner une condition nécessaire pour que $(a_1, a_2) \in H$ soit un extremum local de la restriction de $f$ à l'ensemble $H$.**

La fonction $g$ est polynomiale et admet donc des dérivées partielles continues sur $U$. Nous avons pour tout $(x_1, x_2) \in U$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2.$$

D'aprés la proposition **??**.4.5 la condition cherchée est :

$$\begin{cases} \quad a_1 > 0 \quad , \quad a_2 > 0 \quad , \quad a_1 + 2a_2 = k \quad (\text{traduisant } (a_1, a_2) \in H), \\ et \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(a_1, a_2) - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a_1, a_2) = 0. \end{cases}$$

Ces équations se traduisent par :

$$a_1 > 0 \quad , \quad a_2 > 0 \quad , \quad a_1 + 2a_2 = k \quad \text{et} \quad 2 \times \frac{1}{2\sqrt{a_1}} - \frac{1}{2\sqrt{a_2}} = 0.$$

Soit :

$$a_1 > 0 \quad , \quad a_2 > 0 \quad , \quad a_1 + 2a_2 = k \quad \text{et} \quad a_1 = 4a_2.$$

Il vient :

$$(a_1,\, a_2) = (\frac{2k}{3},\, \frac{k}{6}).$$

4) **Soit $k$ un réel strictement positif. On considère l'ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$ :**

$$K = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \;;\; x_1 + 2x_2 = k\}.$$

**Remarquons que $K = H \cup \{(0,\, \frac{k}{2})\,;\,(k,\, 0)\}$.**

**Pourquoi $f_{|K}$ la restriction de $f$ à $K$ admet-elle un maximum et un minimum atteints sur $K$ ?**

Comme $f$ est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, la restriction de $f$ à $K$ est donc continue. L'ensemble $K$ étant fermé borné, il résulte du théorème II.5.3 que la restriction $f_{|K}$ de $f$ à $K$ admet un maximum et un minimum atteints sur $K$.

5) **Déterminer le maximum et le minimum de $f_{|K}$. En quels points ces valeurs sont-elles atteintes ? Que dire du maximum et du minimum de $f$ sur $H$ ?**

Soit $(a_1,\, a_2)$ un point où $f_{|K}$ atteint un extremum. Deux cas sont possibles.

i) Si ce point est dans $U$, la restriction de $f$ à $H$ admet en ce point un extremum. Il résulte de la question 3 que

$$(a_1,\, a_2) = (\frac{2k}{3},\, \frac{k}{6}).$$

On a alors :

$$f(a_1,\, a_2) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{k}.$$

ii) Si le point $(a_1, a_2)$ n'est pas dans $U$. C'est qu'il se situe sur les bords de $H$. On a soit $a_1 = 0$ et donc $a_2 = \frac{k}{2}$, soit $a_2 = 0$ et $a_1 = k$.

Or nous savons que

$$f(0, \frac{k}{2}) = \sqrt{\frac{k}{2}} < f(k, 0) = \sqrt{k} < f(\frac{2k}{3}, \frac{k}{6}) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{k}.$$

Il en résulte que le minimum de $f_{|K}$ est $\sqrt{\frac{k}{2}}$ atteint en $(0, \frac{k}{2})$ et le maximum de $f_{|K}$ est $\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{k}$ atteint au point $(\frac{2k}{3}, \frac{k}{6})$ de $U$.

Comme $H \subset K$ et $(\frac{2k}{3}, \frac{k}{6}) \in H$, la fonction $f$ sur $H$ admet pour maximum $\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{k}$ atteint en $(\frac{2k}{3}, \frac{k}{6})$. Nous avons vu que la fonction $f$ sur $H$ admet un seul extremum local qui est un maximum. Cette fonction $f$ n'admet donc pas de minimum local.

Autre solution : Remarquons que

$$K = \{(k - 2x_2, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_2 \in [0, \frac{k}{2}]\}.$$

Ainsi les extrema de $f$ sur $K$ correspondent aux extrema de la fonction à une seule variable $g(x_2) = \sqrt{k - 2x_2} + \sqrt{x_2}$ sur l'intervalle $[0, \frac{k}{2}]$. De même, les extrema de $f$ sur $H$ correspondent aux extrema de $g$ sur l'intervalle ouvert $]0, \frac{k}{2}[$.

La fonction $g$ est continue sur $[0, \frac{k}{2}]$ et dérivable sur $]0, \frac{k}{2}[$. Pour tout $0 < x_2 < \frac{k}{2}$ :

$$g'(x_2) = \frac{-2}{2\sqrt{k - 2x_2}} + \frac{1}{2\sqrt{x_2}} = \frac{\sqrt{k - 2x_2} - 2\sqrt{x_2}}{2\sqrt{k - 2x_2}\sqrt{x_2}}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{k - 2x_2} - 2\sqrt{x_2}$, on obtient

$$g'(x_2) = \frac{k - 6x_2}{2\sqrt{k - 2x_2}\sqrt{x_2}(\sqrt{k - 2x_2} + 2\sqrt{x_2})},$$

qui est su signe de $k - 6x_2$. Nous en déduisons le tableau de variation de $g$ sur $[0, \frac{k}{2}]$ :

Tableau de variation de $g$ :

| $x_2$ | $0$ | | $\frac{k}{6}$ | | $\frac{k}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x_2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x_2)$ | $\sqrt{k}$ | $\nearrow$ | $\sqrt{\frac{3k}{2}}$ | $\searrow$ | $\sqrt{\frac{k}{2}}$ |

Ce tableau redonne bien les mêmes résultats demandés.

6) **Tracer les lignes de niveaux de la fonction $f$.**

Soit $l$ un réel. Ces lignes de niveaux sont les courbes $E_l$ d'équation :

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = l.$$

Pour $l < 0$, l'ensemble $E_l$ est vide et pour $l = 0$, $E_l$ est réduit au singleton $\{(0, 0)\}$.

Pour $l > 0$, $(x_1, x_2) \in E_l$ équivaut à

$$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \sqrt{x_2} = l - \sqrt{x_1}$$

ou encore à

$$x_2 = (l - \sqrt{x_1})^2 \quad \text{et} \quad 0 \leq x_1 \leq l^2.$$

Ainsi, $E_l$ est le graphe de la fonction $h_l$ :

$$h_l : [0, l^2] \to \mathbb{R} \quad , \quad x_1 \mapsto x_2 = (l - \sqrt{x_1})^2.$$

Pour $x_1 > 0$, la fonction $h_l$ est dérivable en $x_1$ et :

$$h'(x_1) = 2(l - \sqrt{x_1})\frac{-1}{2\sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1} - l}{\sqrt{x_1}}$$

qui est négative pour $x_1 \in ]0, l^2[$. Nous en déduisons que $h$ est décroissante de $h(0) = l^2$ à $h(l^2) = 0$.

D'où la courbe représentative de $E_l$ pour $l > 0$ : `à venir ...`

On remarquera que si $(x_1,\, x_2) \in E_{l'}$ avec $l' \geq l$ et $x_1 \in ]0,\, l^2[$, alors on a $x_2 = (l' - \sqrt{x_1})^2 \geq (l - \sqrt{x_1})^2$. Ainsi les lignes de niveau $E_{l'}$ avec $l' \geq l$ sont au-dessus du graphe de $h_l$. Il en résulte que si en $(a_1,\, a_2) \in U$, la restriction de $f$ à $H$ admet un extremum, la droite $x_1 + 2x_2 = a_1 + 2a_2$ ne traverse pas le graphe de $h_l$ pour $l = f(a_1,\, a_2)$. On retrouve que la droite $x_1 + 2x_2 = a_1 + 2a_2$ est alors une tangente au graphe de $h_l$ en $(a_1,\, a_2)$.

**Exercice 2 :**(version maximum lié)

Considérons l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^3$ :

$$U = \{(x_1,\, x_2,\, t) \in \mathbb{R}^3, \quad x_1 > 0,\; x_2 > 0 \quad \text{et} \quad t < 1\}.$$

Notons $f$ et $g$ les applications

$$\begin{array}{lcl} f : U \to \mathbb{R} & , & (x_1,\, x_2,\, t) \mapsto f(x_1,\, x_2,\, t) = \ln x_1 + \ln x_2 + \ln(1 - t), \\ g : U \to \mathbb{R} & , & (x_1,\, x_2,\, t) \mapsto g(x_1,\, x_2,\, t) = x_1 + x_2 - 2t. \end{array}$$

**1) Justifier que la fonction $g$ est définie sur $U$ et admet des dérivées partielles continues sur $U$ que l'on déterminera.**

L'application $g$ est la restriction à un ouvert d'une application polynômiale. Elle est donc continue et admet des dérivées partielles continues sur $U$. Nous obtenons pour tout $(x_1,\, x_2,\, t) \in U$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, t) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,\, x_2,\, t) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial t}(x_1,\, x_2,\, t) = -2.$$

**2) Montrer que la fonction $f$ est définie sur $U$ et est continue sur $U$.**

Pour tout $(x_1,\, x_2,\, t) \in U$, nous avons $x_1 > 0$, donc $\ln x_1$ est défini, nous avons $x_2 > 0$, donc $\ln x_2$ est défini et $1 - t > 0$, donc $\ln(1 - t)$ est défini. Ainsi, $f(x_1,\, x_2,\, t)$ est défini.

La fonction de $U$ vers $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ qui à $(x_1,\, x_2,\, t)$ associe $x_1$ est continue comme la restriction d'une application polynômiale. La fonction d'une seule variable de $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ qui à $x$ associe $\ln x$ est continue. La fonction composée de $U$ vers $\mathbb{R}$ qui à $(x_1,\, x_2,\, t)$ associe $\ln x_1$ est alors continue. On montre de même que les fonctions de $U$ vers $\mathbb{R}$ qui à $(x_1,\, x_2,\, t)$ associe $\ln x_2$ et $\ln(1-t)$ sont continues. La fonction $f$ est donc continue sur son domaine de définition comme somme d'applications continues.

**3) Montrer que la fonction $f$ admet sur $U$ des dérivées partielles continues que l'on déterminera.**

Soit $(x_1,\, x_2,\, t) \in U$, fixons $x_2 > 0$ et $t < 1$ et considérons la fonction :

$$\mathbb{R}^+ - \{0\} \to \mathbb{R}\ ,\ x_1 \mapsto \ln x_1 + \ln x_2 + \ln(1-t).$$

Cette fonction est dérivable, sa dérivée en $x_1$ est :

$$\frac{1}{x_1}.$$

Ainsi, $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $x_1$ sur $U$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, t) = \frac{1}{x_1}.$$

De même, $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $x_2$ sur $U$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, t) = \frac{1}{x_2}$$

et $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $t$ sur $U$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, t) = -\frac{1}{1-t}.$$

Ces dérivées partielles sont continues sur $U$, car de la forme $1/l$ où $l$ est une fonction continue sur $U$ qui ne s'annule pas.

**4) On considère la fonction $h$ définie sur $U \times \mathbb{R}$ :**

$$h : U\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ (x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) \mapsto h(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) = f(x_1,\, x_2,\, t) + \lambda(g(x_1,\, x_2,\, t) - 1)\ .$$

**Montrer que la fonction $h$ admet sur $U$ des dérivées partielles continues que l'on déterminera.**

Tout d'abord $h$ admet bien des dérivées partielles continues comme somme et produit de telles fonctions. Nous obtenons pour tout $(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, t) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,\, x_2,\, t) = \frac{1}{x_1} + \lambda,\\
&\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\, x_2,\, t) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,\, x_2,\, t) = \frac{1}{x_2} + \lambda,\\
&\frac{\partial h}{\partial t}(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial t}(x_1,\, x_2,\, t) + \lambda \frac{\partial g}{\partial t}(x_1,\, x_2,\, t) = -\frac{1}{1-t} - 2\lambda,\\
&\frac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) = g(x_1,\, x_2,\, t) - 1 = x_1 + x_2 - 2t - 1.
\end{aligned}$$

**5) Déterminer les points $(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$ critiques de $h$ (c'est-à-dire les points où les quatre dérivées partielles de $h$ s'annulent). <u>Indication</u> : on exprimera $x_1,\, x_2,\, t$ en fonction de $\lambda$ et on utilisera la relation $\dfrac{\partial h}{\partial \lambda}(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) = 0$ pour trouver $\lambda$.**

Les équations sont :

$$0 = \frac{1}{x_1} + \lambda = \frac{1}{x_2} + \lambda = -\frac{1}{1-t} - 2\lambda = x_1 + x_2 - 2t - 1.$$

Comme $x_1 > 0$, le réel $\lambda$ ne peut être nul. Il vient :

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{1}{\lambda},\\
x_2 &= -\frac{1}{\lambda},\\
t &= 1 + \frac{1}{2\lambda}.
\end{aligned}$$

Remplaçons ces valeurs dans l'expression $x_1 + x_2 - 2t - 1 = 0$, il vient :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} - 2(1 + \frac{1}{2\lambda}) - 1 = 0,\\
&-\frac{3}{\lambda} - 3 = 0,\\
&\lambda = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $h$ a un unique point critique :

$$(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda) = (1,\, 1,\, \frac{1}{2},\, -1).$$

**6) On suppose savoir que la restriction de la fonction $f$ à l'ensemble $G$ d'équation**

$$G = \{(x_1, x_2, t) \in U \quad \text{tel que} \quad g(x_1, x_2, t) = 1\}$$

**admet un maximum. Trouver ce maximum. En quel point de $U$ est-il atteint ?**

D'aprés la proposition V.4.5, comme $f$ et $g$ admettent des dérivées partielles continues sur $U$, si en $(x_1,\, x_2,\, t) \in U$, la restriction de $f$ à $G$ possède un maximum, c'est qu'il existe $\lambda$ tel que $(x_1,\, x_2,\, t,\, \lambda)$ soit un point critique de $h$. Il vient donc :

$$(x_1,\, x_2,\, t) = (1,\, 1,\, \frac{1}{2}).$$

Le maximum est donc $f(1,\, 1,\, \frac{1}{2}) = -\ln 2$. Il est atteint en $(1,\, 1,\, \frac{1}{2})$.

**7) Soit $D$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ :**

$$D = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x_1 > 0 \; , \; x_2 > 0 \; , \; x_1 + x_2 < 3\}.$$

**Dessiner $D$. Montrer l'égalité :**

$$G = \{(x_1,\, x_2,\, t) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (x_1,\, x_2) \in D \text{ et } t = \frac{x_1 + x_2 - 1}{2}\}.$$

**En déduire :**

$$\sup_{(x_1,\, x_2,\, t) \in G} f(x_1,\, x_2,\, t) = \sup_{(x_1,\, x_2) \in D} \ln(x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2)) - \ln 2 = -\ln 2.$$

Par définition si $(x_1,\, x_2,\, t) \in G$, nous avons $x_1 > 0$ , $x_2 > 0$ , $t < 1$ et $x_1 + x_2 - 2t - 1 = 0$. Il s'en suit $t = \dfrac{x_1 + x_2 - 1}{2} < 1$, d'où $x_1 + x_2 = 2t + 1 < 3$. Ainsi :

$$(x_1,\, x_2,\, t) \in \{(x_1,\, x_2,\, t) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (x_1,\, x_2) \in D \text{ et } t = \frac{x_1 + x_2 - 1}{2}\}.$$

Réciproquement si $(x_1,\, x_2,\, t)$ appartient à cet ensemble :

$$t = \frac{x_1 + x_2 - 1}{2} < \frac{3-1}{2} = 1.$$

Il en résulte $(x_1,\, x_2,\, t) \in G$. Ainsi, on a bien :

$$G = \{(x_1,\, x_2,\, t) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (x_1,\, x_2) \in D \text{ et } t = \frac{x_1 + x_2 - 1}{2}\}.$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\sup_{(x_1,\, x_2,\, t) \in G} f(x_1,\, x_2,\, t) &= \sup_{(x_1,\, x_2) \in D \text{ et } t = \frac{x_1+x_2-1}{2}} f(x_1,\, x_2,\, t) \\
&= \sup_{(x_1,\, x_2) \in D} f\left(x_1,\, x_2, \frac{x_1 + x_2 - 1}{2}\right) \\
&= \sup_{(x_1,\, x_2) \in D} \left(\ln x_1 + \ln x_2 + \ln\left(\frac{3 - x_1 - x_2}{2}\right)\right) \\
&= \sup_{(x_1,\, x_2) \in D} \ln\left(x_1 x_2 \left(\frac{3 - x_1 - x_2}{2}\right)\right) \\
&= \sup_{(x_1,\, x_2) \in D} \ln(x_1 x_2\,(3 - x_1 - x_2)) - \ln 2.
\end{aligned}$$

L'exercice suivant nous permettra de donner une autre démonstration de la question 5 sans avoir à admettre l'existence d'un maximum.

**Exercice 3 :**(version maximum libre)

**1) Soit $h$ l'application polynômiale :**

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1,\, x_2) \mapsto x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2).$$

**Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial h}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial h}{\partial x_2}$ .**
**(On constatera que $x_2$ est en facteur dans $\dfrac{\partial h}{\partial x_1}$ et $x_1$ dans $\dfrac{\partial h}{\partial x_2}$).**

L'application $h$ étant polynômiale, elle a des dérivées partielles de tout ordre. Soit $(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = x_2(3 - x_1 - x_2) - x_1 x_2 = x_2(3 - 2x_1 - x_2),$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = x_1(3 - x_1 - x_2) - x_1 x_2 = x_1(3 - x_1 - 2x_2).$$

**2) Calculer ensuite les dérivées partielles d'ordre 2 de $h$.**

Soit $(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) &= -2x_2, \\
\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) &= -2x_1, \\
\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 x_2}(x_1, x_2) &= 3 - 2x_1 - x_2 - x_2 = 3 - 2x_1 - 2x_2.
\end{aligned}$$

**3) Montrer que $(1,\, 1)$ est un point critique de $h$, c'est-à-dire que $\frac{\partial h}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial h}{\partial x_2}$ s'annulent en $(1,\, 1)$. Puis, montrer que $(1,\, 1)$ est un extremum local. Est-ce un maximum ou un minimum local, quelle est sa valeur ?**

Nous avons :

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(1,\, 1) = 1(3 - 2 - 1) = 0,$$
$$\frac{\partial h}{\partial x_2}(1,\, 1) = 1(3 - 1 - 2) = 0.$$

Comme $h$ admet des dérivées partielles, d'après la proposition V.5.1. une condidition suffisante pour que $(1,\, 1)$ soit un extremum local est alors que le nombre

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(1,\, 1)\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(1,\, 1) - \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 x_2}(1,\, 1)\right)^2$$

soit strictement positif. Nous avons :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(1,\, 1) = \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(1,\, 1) = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 x_2}(1,\, 1) = -1.$$

Comme $(-2)(-2) - (-1)^2 = 3 > 0$, $h$ admet donc un extremum local en $(1,\, 1)$. Toujours d'après la même proposition V.5.1., comme

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}(1,\, 1) + \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2}(1,\, 1) = -4,$$

la fonction $h$ admet alors un maximum local en $(1,\,1)$. La valeur de ce maximum local est $h(1,\,1) = 1$.

**4) La valeur $1$ est-elle un maximum de $h$ sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $h$ est-elle majorée sur $\mathbb{R}^2$ ?**

Nous avons $h(5,\,-1) = -5(3-5+1) = 5 > h(1,\,1) = 1$, donc 1 n'est pas le maxiumum de $h$ sur $\mathbb{R}^2$. Plus généralement pour tout entier $A$ positif, il existe un entier $n$ tel que

$$h(n+5,\,-n-1) = -(n+5)(n+1)(3-n-5+n+1) = (n+5)(n+1) \geq n^2 \geq A.$$

Ainsi, $h$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^2$.

**5) Déterminer les points critiques de $h$ situés dans l'ouvert $D$ de $\mathbb{R}^2$ :**

$$D = \{(x_1,\,x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x_1 > 0\ ,\ x_2 > 0\ ,\ x_1 + x_2 < 3\}.$$

Ce sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x_1 > 0\ ,\ x_2 > 0\ ,\ x_1 + x_2 < 3, \\ x_2(3 - 2x_1 - x_2) = 0, \\ x_1(3 - x_1 - 2x_2) = 0. \end{cases}$$

Comme sur $D$, $x_2$ et $x_1$ sont non nuls, il vient

$$\begin{cases} \\ 3 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3 - x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système. Nous obtenons $x_2 = 3-2x_1$. Substituons dans l'équation $3 - x_1 - 2x_2 = 0$, il vient $3 - x_1 - 2(3 - 2x_1) = 0$. Soit, $-3 + 3x_1 = 0$. Soit $x_1 = 1$. En reportant dans l'équation $x_2 = 3 - 2x_1$, nous obtenons $x_2 = 1$. Le point $(x_1,\,x_2) = (1,\,1)$ est dans $D$. C'est donc l'unique point critique de $h$ sur $D$.

**6) On considère $K$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :**

$$K = \{(x_1,\,x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0 \text{ et } x_1 + x_2 \leq 3\}\ .\}$$

**Représenter $K$ et montrer que $K$ est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.**

L'ensemble $K$ est fermé comme intersection de trois demi-plans fermés de $\mathbb{R}^2$ (voir remarque II.2.4.).

**dessin :** `à suivre`

Soit $(x_1,\, x_2) \in K$, nous avons :

$$0 \leq x_1 \leq x_1 + x_2 \leq 3$$

car $x_1$ et $x_2$ sont positifs et $x_1 + x_2 \leq 3$. Ainsi, $x_1 \leq 3$. De même, nous obtenons $0 \leq x_2 \leq 3$. Il en résulte que si $(x_1, x_2) \in K$, nous avons :

$$0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 9 + 9 = 18 \quad \text{donc} \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Ainsi, $K$ est contenu dans la boule fermée de centre $(0,\, 0)$ et de rayon $3\sqrt{2}$. Il est donc borné.

**7) On considère la restriction de la fonction $h$ à $K$. Pourquoi cette restriction admet-elle un maximum et un minimum ? Déterminer le maximum et le minimum de cette restriction. Déterminer en quels points ces extrema sont atteints.**

La fonction $h$ étant polynomiale, sa restriction à $K$ est continue. Comme $K$ est fermé et borné il résulte du théorème II.5.3 que cette restriction admet un maximum et un minimum.

Si un extremum est atteint sur le bord de $K$, on a $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ou bien $3 - x_1 - x_2$ sont nuls. Comme $h(x_1,\, x_2) = x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2)$, cela implique que la fonction $h$ est nulle sur le bord de $K$. Donc, dans ce cas, cet extremum a pour valeur zéro.

Si $(a_1,\, a_2)$ est un extremum de la restriction de $h$ à $K$ atteint en un point de $K$ non situé sur le bord de $K$, ce point est sur l'ouvert $D$. Ainsi $(a_1,\, a_2)$ serait un point où à fortiori la restriction de $h$ à $D$ aurait un extremum. L'ensemble $D$ étant ouvert, ce serait un point critique de $h$. D'après la question 5, on aurait donc $(a_1,\, a_2) = (1,\, 1)$ qui est bien dans $D$. La valeur de l'extremum est $h(1,\, 1) = 1$.

On déduit que 0 est le minimum de $f$ atteint sur tout le bord de $K$ et que 1 est le maximum de $h$ atteint en $(1,\, 1) \in D$. Il en résulte :

$$1 = h(1,\, 1) = \sup_{(x_1,\, x_2) \in K} h(x_1,\, x_2) = \sup_{(x_1,\, x_2) \in D} h(x_1,\, x_2).$$

Le lien avec l'exercice précédent est que nous en déduisons

$$0 = \sup_{(x_1,\, x_2) \in D} \ln h(x_1,\, x_2)$$

et donc

$$-\ln 2 = \sup_{(x_1,\, x_2) \in D} \ln(x_1 x_2 (3 - x_1 - x_2)) - \ln 2.$$

**Exercice 4 :**

**On considère l'application $f$ :**

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (x_1,\, x_2) \mapsto f(x_1,\, x_2) = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2}.$$

**1) Quel est le domaine de définition de $f$ ? Nous le noterons $\mathcal{D}_f$. Dessiner la droite $D$ d'équation $x_1 + 2x_2 = 0$.**

Le réel $f(x_1,\, x_2)$ est défini si et seulement si $x_1 + 2x_2 \neq 0$. Ainsi, $\mathcal{D}_f$ est le complémentaire de la droite d'équation $x_1 + 2x_2 = 0$

$$\mathcal{D}_f = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tel que} \quad x_1 + 2x_2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \backslash D.$$

**dessin :** `to be continued ...`

**2) Montrer que $\mathbb{R} - \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.**

On sait que $\mathbb{R} - \{0\}$ est ouvert car réunion des intervalles ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$ (voir remarque II.1.3.). On peut aussi le montrer en revenant à la défintion II.1.1. En effet, soit $x_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$ ; il est clair que pour $\epsilon = \dfrac{\mid x_0 \mid}{2}$, l'intervalle $]-\epsilon + x_0,\, x_0 + \epsilon[$ est contenu dans $\mathbb{R} - \{0\}$ (faire un dessin et envisager le cas $x_0 > 0$ et $x_0 < 0$).

**3) Montrer que $\mathcal{D}_f$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.**

On sait que $\mathcal{D}_f$ est le complémentaire d'une droite est ouverte dans le plan. C'est donc la réunion de demi-plans ouverts. On peut aussi le montrer en utilisant la question précédente. En effet comme la fonction $g$ définie par $(x_1,\, x_2) \mapsto x_1 + 2x_2$ est polynômiale. Elle est donc continue. Puisque $\mathbb{R} - \{0\}$ est un ouvert, il résulte de la proposition II.5.1. que

$$\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2\ ;\ g(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R} - \{0\}\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. d'où le résultat car cet ensemble est exactement $\mathcal{D}_f$.

**3) Montrer que $f$ admet des dérivées partielles continues sur $\mathcal{D}_f$. Déterminer ces dérivées partielles.**

Comme toute fonction rationnelle $f$ admet des dérivées partielles continues sur son domaine de définition. Nous obtenons en fixant $x_2$ et en dérivant par rapport à $x_1$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) = \frac{(x_1 + 2x_2)2 - (2x_1 + x_2)(1)}{(x_1 + 2x_2)^2} = \frac{3x_2}{(x_1 + 2x_2)^2}$$

et en fixant $x_1$, puis dérivant par rapport à $x_2$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = \frac{(x_1 + 2x_2)1 - (2x_1 + x_2)(2)}{(x_1 + 2x_2)^2} = \frac{-3x_1}{(x_1 + 2x_2)^2}.$$

**4) Déterminer les points critiques de $f$ sur sur $\mathcal{D}_f$.**

Ce sont les points solutions du système :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \neq 0 \\ \dfrac{3x_2}{(x_1 + 2x_2)^2} = \dfrac{-3x_1}{(x_1 + 2x_2)^2} = 0. \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent $x_1 = x_2 = 0$. Comme le point $(0,\, 0)$ n'est pas dans $\mathcal{D}_f$, la fonction $f$ n'admet donc pas de points critiques sur $\mathcal{D}_f$. En particulier, $f$, n'aura pas d'extrema locaux sur $\mathcal{D}_f$.

**5) Déterminer la ligne de niveau (voir définition section V) de la fonction $f$ définie par :**

$$E_1 = \{(x_1,\, x_2) \in \mathcal{D}_f \;;\; \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2} = 1\}$$

L'ensemble $E_1$ est défini par les conditions

$$x_1 + 2x_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad 2x_1 + x_2 = x_1 + 2x_2,$$

ou encore

$$x_1 + 2x_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad x_1 - x_2 = 0.$$

Il s'agit donc des points de la droite $D_1$ d'équation $x_1 - x_2 = 0$ qui ne sont pas sur la droite $D$. L'intersection des droites $D_1$ et $D$ est réduit à l'origine de $\mathbb{R}^2$. En effet si $x_1 - x_2 = 0$ et $x_1 + 2x_2 = 0$, on obtient $x_1 = x_2$ et $3x_2 = 0$. d'où $x_2 = 0$, puis $x_1 = 0$. Ainsi, nous obtenons :

$$E_1 = D_1 - \{(0, 0)\}.$$

**dessin** `[...]`

Plus généralement, on trouve que $E_{1/2}$, défini par

$$E_{1/2} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{D}_f \;;\; \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2} = \frac{1}{2}\},$$

est l'axe des abscisses privé de l'origine de $\mathbb{R}^2$. Et que pour $k \neq (1/2)$, la ligne de niveau $E_k$ définie par

$$E_k = \{(x_1,\, x_2) \in \mathcal{D}_f \;;\; \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2} = k\}$$

est la droite passant par l'origine de pente $\dfrac{2-k}{2k-1}$ privée de l'origine de $\mathbb{R}^2$.

**6) Donner une approximation pour $h$ et $l$ deux réels petits de $f(1 + h,\, 1 + l)$.**

Puisque $f$ admet des dérivées partielles continues sur l'ouvert $\mathcal{D}_f$ et que $(1,\, 1) \in \mathcal{D}_f$, nous avons affirmé à la proposition III.3.3. qu'il existe une fonction de deux variables tendant vers zéro lorsque $(h_1,\, h_2)$ tendent vers zéro telle que

$$f(1+h_1,\, 1+h_2) = f(1,\, 1) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,\, 1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,\, 1)h_2 + \epsilon(h_1,\, h_2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Nous avons

$$f(1,\, 1) = 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(1,\, 1) = \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(1,\, 1) = -\frac{1}{3}.$$

Il en résulte qu'une approximation de $f(1+h,\, 1+l)$ pour $h,\, l$ petits est :

$$1 + \frac{h}{3} - \frac{l}{3}.$$

**7) Montrer que sur $\mathcal{D}_f$ la fonction $f$ est homogéne de degré $0$. Retrouver l'identité d'Euler**

Tout d'abord $\mathcal{D}_f$ est bien un cône positif (voir définition III.5.2 En effet si $(x_1,\, x_2) \in \mathcal{D}_f$ et si $\lambda > 0$. Nous avons $x_1 + 2x_2 \neq 0$, donc en multipliant par $\lambda$ qui est non nul, on obtient

$$\lambda x_1 + 2\lambda x_2 \neq 0$$

ainsi $(\lambda x_1, \lambda x_2) \in \mathcal{D}_f$. Pour montrer que $f$ est homogène de degré 0, il suffit de montrer que si $(x_1,\, x_2) \in \mathcal{D}_f$ et si $\lambda > 0$, nous avons :

$$f(\lambda x_1,\, \lambda x_2) = \lambda^0 f(x_1,\, x_2) = f(x_1,\, x_2).$$

Cela est vrai puisque

$$f(\lambda x_1,\, \lambda x_2) = \frac{2\lambda x_1 + \lambda x_2}{\lambda x_1 + 2\lambda x_2} = \frac{\lambda(2x_1 + x_2)}{\lambda(x_1 + 2x_2)} = f(x_1,\, x_2).$$

De plus, nous avons bien pour tout $(x_1,\, x_2) \in \mathcal{D}_f$ l'identité d'Euler :

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\, x_2) + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,\, x_2) = 0.$$

$\boxed{\textbf{FIN}}$