EXERCICE À RÉDIGER 3

✍

Exercice 1 (L'espace vectoriel normé des polynômes). Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère

$$\|P\| := \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right| .$$

(1) Montrer que $\| - \|$ est une norme de $\mathbb{R}[X]$.

L'application $\|-\| : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ est bien à valeur réelle positive. On remarque que, pour tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n + \cdots + a_m X^m$, on a

$$\frac{P^{(n)}(0)}{n!} = a_n \quad \text{et donc} \quad \|P\| = \sum_{i=0}^{m} |a_i| .$$

(a) On a l'équivalence suivante

$$\|P\| = \sum_{i=0}^{m} |a_i| = 0 \iff \forall i \in \{0, 1, \dots, m\},\ a_i = 0 \iff P = 0 .$$

(b) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda P\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{\lambda P^{(n)}(0)}{n!} \right| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right| = |\lambda| \|P\| .$$

(c) Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\|P + Q\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(P+Q)^{(n)}(0)}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{P^{(n)}(0) + Q^{(n)}(0)}{n!} \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \right| + \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{Q^{(n)}(0)}{n!} \right| = \|P\| + \|Q\| .$$

---

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Est-ce que l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{u}_n : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & P^{(n)}(0) \end{array}$$

est continue ?

On remarque que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\frac{\left|P^{(n)}(0)\right|}{n!} \leqslant \|P\| \iff \left|P^{(n)}(0)\right| \leqslant n! \|P\| .$$

Comme l'application u_n est linéaire, cela implique qu'elle est lipschtizienne et donc continue, par théorème du cours.

---

(3) Est-ce que l'application dérivée

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d} : & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

est continue ?

Encore une fois, on remarque de cette application d est linéaire. Supposons par l'absurde qu'elle soit continue, cela signifierait qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \|P'\| \leqslant C \|P\| .$$

En considérant les monômes $P_m \coloneqq X^m$, on voit qu'on aurait alors

$$\|P'_m\| = \|mX^{m-1}\| = m \leqslant C\|P_m\| = C \ ,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. D'où la contradiction et le fait que l'application dérivée d n'est pas continue pour la norme $\| - \|$.

✍