EXAMEN PARTIEL : CORRIGÉ

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point. L'utilisation de tout appareil électronique (calculatrice, téléphone) est interdit.

Exercice 1 (Questions de cours).

(1) Donner une description de l'adhérence $\overline{A}$ d'un ensemble A d'un espace vectoriel normé (E, N) utilisant la notion de suite. (On ne demande pas de démonstration, juste l'énoncé.)

L'adhérence $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.

(2) Soit $f : (E, \mathrm{N}_E) \to (F, \mathrm{N}_F)$ une application continue entre espaces vectoriels normés et soit $K \subset E$ un ensemble compact de E. Montrer que l'image $f(K) = \{f(x) \mid x \in K\}$ de K par f est un ensemble compact de F.

Soit $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(K)$. La suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vit dans K qui est compact : par définition, on peut donc extraire une sous-suite $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans K,

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in K \ .$$

En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité, on en conclut que la sous-suite extraite d'images converge dans $f(K)$:

$$f\left(x_{\varphi(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \in f(K) \ .$$

Exercice 2 (Topologie). Soit (E, N) un espace vectoriel normé et soient A et B des sous-ensembles de E. On note

$$A + B := \{a + b,\ (a, b) \in A \times B\} \ .$$

(1) Si A est ouvert (et B quelconque), montrer que $A + B$ est ouvert.

Soit $a + b \in A + B$, c'est-à-dire que $a \in A$ et $b \in B$. Comme A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre a et de rayon r appartienne à A, c'est-à-dire $B(a, r) \subset A$. On a donc

$$B(a + b, r) = B(A, r) + b \subset A + B \ ,$$

donc l'ensemble $A + B$ est ouvert.

(2) Si A est compact et B fermé, montrer que $A + B$ est fermé.

On va utiliser la caractérisation séquentielle des ensembles fermés d'un espace vectoriel normé : il s'agit des ensembles dont les suites convergentes ont leurs limites dans eux-mêmes. Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de $A + B$: $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$; on va chercher à montrer que $x \in A + B$. La suite s'écrit $x_n = a_n + b_n$, avec $a_n \in A$ et $b_n \in B$ (mais on sait *a priori* rien sur la convergence des suites $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$). Comme A est compact, on peut extraire de la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\{a_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans A :

$$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \in A \ .$$

Par continuité de la somme, la sous-suite $\{b_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $b := x - a$. Comme B est fermé, cela implique que b est dans B. On en conclut que $x = a + b \in A + B$ et donc que $A + B$ est fermé.

✍

Exercice 3 (Continuité). On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) := \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}\ ,\ \text{pour } (x,y) \neq (0,0)\ , \quad \text{et par} \quad f(0,0) := 0\ .$$

(1) L'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$?

Comme l'application f est composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, elle est donc continue $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$.

---

(2) L'application f est-elle continue en $(0,0)$?

On considère les deux suites convergentes suivantes :

$$f\left(0, \tfrac{1}{n}\right) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad f\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ .$$

Si l'application f était continue en $(0,0)$, ces deux suites convergeraient vers la même limite car $\left(0, \tfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$ et $\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$, ce qui n'est pas le cas : l'application f n'est donc pas continue en $(0,0)$.

✍

Exercice 4 (Normes). On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Pour tout polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, on considère

$$\mathrm{N}_1(P) := \max_{0\leqslant i\leqslant n} |a_i| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}_2(P) := \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|\ .$$

On admettra que N_1 est une norme (sans le démontrer).

(1) Montrer que N_2 est une norme.

L'application $\mathrm{N}_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ est bien à valeur réelle positive.

(a) Pour le polynôme nul $P = 0$, on a bien $\mathrm{N}_2(0) = 0$. Dans l'autre sens, si $\mathrm{N}_2(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| = 0$, alors le polynôme P a une infinité de racines ; ceci n'est possible que si le polynôme est nul, i.e. $P = 0$.

(b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{N}_2(\lambda P) = \sup_{t\in[0,1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t\in[0,1]} \big(|\lambda||P(t)|\big) = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|\ .$$

(c) Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\mathrm{N}_2(P+Q) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)+Q(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \big(|P(t)|+|Q(t)|\big) \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |Q(t)| = \mathrm{N}_2(P) + \mathrm{N}_2(Q)\ .$$

---

(2) Est-ce que les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes ?

On considère la suite de polynômes $P_n := 1 + X + \cdots + X^n$. Leurs normes vérifient respectivement

$$\mathrm{N}_1(P_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}_2(P_n) \geqslant |P_n(1)| = n+1\ .$$

Il n'existe donc aucun $C > 0$ tel que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on ait

$$\mathrm{N}_2(P) \leqslant C\,\mathrm{N}_1(P)\ ,$$

car sinon, on aurait $n+1 \leqslant C$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible. Les deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

On considère l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\Delta(P(X)) := P(X) - P(1-X)$.

(3) L'application Δ est-elle continue pour la norme N_1 ?

On commence par remarquer que l'application Δ est linéaire ; elle donc continue si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que $\mathrm{N}_1(\Delta(P)) \leqslant C\,\mathrm{N}_1(P)$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. On évalue Δ sur le polynôme $P = X^n$:

$$\Delta(X^n) = X^n - (1-X)^n = -1 + nX + \cdots + (-1)^n n X^{n-1} ,$$

ce qui implique

$$\mathrm{N}_1\left(\Delta\left(X^n\right)\right) \geqslant n \ .$$

Comme $\mathrm{N}_1(X^n) = 1$, il est impossible de trouver un tel $C > 0$ et donc l'application linéaire Δ n'est pas continue pour la norme N_1 .

(4) L'application Δ est-elle continue pour la norme N_2 ?

On utilise la même caractérisation des applications linéaires mentionnées à la question précédente. Comme $1 - t \in [0,1]$, pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\mathrm{N}_2(\Delta(P)) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - P(1-t)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} \big(|P(t)| + P(1-t)|\big) \leqslant 2 \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| = 2\mathrm{N}_2(P) ,$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. L'application linéaire Δ est donc continue pour la norme N_2.

✍

Exercice 5 (Distance). Soit (E, N) un espace vectoriel normé et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Pour tout $x \in E$, on définit la *distance* de x à F par

$$\mathrm{d}(x, F) := \inf_{y\in F} \mathrm{N}(x-y) \ .$$

Montrer que pour tout $x \in E$, cette distance de x à F est atteinte, c'est-à-dire

$$\exists y \in F,\ \mathrm{d}(x,F) = \mathrm{N}(x-y) \ .$$

Soit $x \in E$. Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que

$$\mathrm{N}(x - y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{y\in F} \mathrm{N}(x-y) = \mathrm{d}(x,F) \ .$$

La suite $\{\mathrm{N}(x-y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est convergente, elle est donc bornée :

$$\mathrm{N}(x-y_n) \leqslant M \ , \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \ .$$

Avec

$$\mathrm{N}(y_n) = \mathrm{N}(y_n - x + x) \leqslant \mathrm{N}(x-y_n) + \mathrm{N}(x) \leqslant M + \mathrm{N}(x)$$

cela implique que la suite $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de F : elle est contenue dans $\overline{B}(0,\rho) \cap F$, où $\overline{B}(0,\rho)$ est la boule fermée de rayon $\rho := M + \mathrm{N}(x)$ et de centre 0 . Comme $\overline{B}(0,\rho) \cap F$ est un ensemble fermé borné de l'espace vectoriel normé de dimension finie F, c'est un compact. Il existe donc une sous-suite $\{y_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans F :

$$y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y \in F \ .$$

Par continuité de la norme, on obtient

$$\mathrm{N}(x - y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{N}(x-y) = \inf_{y\in F} \mathrm{N}(x-y) = \mathrm{d}(x,F) ,$$

ce qui montre que la distance entre x et F est atteinte en $y \in F$.