UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD

DL 4 : ANALYSE 20 AVRIL 2023

SUJET MAISON 2

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point.

✍

Exercice 1 (Extremum local). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que l'application f admet en a un *minimum local* (respectivement *maximum local*) s'il existe $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in B(a, \rho)\ , \quad f(x) \geqslant f(a) \quad (\text{respectivement} f(x) \leqslant f(a))\ .$$

On appelle *extremum local* un minimum local ou un maximum local.

(1) On suppose que l'application f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la différentielle $\mathrm{D}_a f = 0$ s'annule en a si l'application f admet un extremum local en a.

Par définition de la différentiabilité de l'application f en a, il existe un nombre $r > 0$, une application linéaire continue $\mathrm{D}_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une application $\varepsilon : B(0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, tels que

$$\forall h \in B(0, r)\ , \quad f(a+h) = f(a) + \mathrm{D}_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h)\ .$$

Si l'application f admet un minimum local en a, alors il existe $\rho > 0$ tel que

$$\forall h \in B\big(0, \min(r, \rho)\big)\ , \quad \mathrm{D}_a f(h) + \|h\|\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) \geqslant 0\ .$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ différent du vecteur nul $x \neq 0$ et soit $0 < t < \frac{\min(r,\rho)}{\|x\|}$. On appliquant l'égalité précédente à $h = tx$, qui vérifie $\|tx\| = t\|x\| < \min(r, \rho)$, on obtient

$$\mathrm{D}_a f(tx) + \|tx\|\varepsilon(tx) = t\big(\mathrm{D}_a f(x) + \|x\|\varepsilon(tx)\big) \geqslant 0\ .$$

En divisant par t puis en faisant tendre t vers 0, on aboutit à $\mathrm{D}_a f(x) \geqslant 0$, pour tout $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$. Mais la linéarité de l'application différentielle $\mathrm{D}_a f$ donne alors $\mathrm{D}_a f(x) = -\mathrm{D}_a f(-x) \leqslant 0$. On en conclut que $\mathrm{D}_a f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. (Les mêmes arguments s'appliquent au cas où l'application f admet un maximum local en a.)

---

(2) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) \coloneqq x^2(x-1) + y^3$$

admet-elle des extrema locaux ?

On commence par remarquer la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car elle est polynomiale en x et en y. Nous avons vu à la question précédente que si l'application f admet un extremum local en a, alors sa différentielle y est nulle. On cherche donc les éléments $a \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathrm{D}_a f = 0$. (On les appelle les *points critiques* de l'application f.) Comme la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$, sa différentielle est donnée par ses dérivées partielles :

$$\mathrm{D}_a f(h, k) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a)\ .$$

Les points critiques de f sont donc les éléments a de $\mathbb{R}^n$ où les dérivées partielles s'annulent

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0\ .$$

Ici, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2\ .$$

Les deux seuls points critiques sont donc

$$(0,0) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{3}, 0\right) .$$

- ⋄ On voit que $f(0,0) = 0$ et que $f(0,y) = y^3$: il est donc impossible d'avoir $f(x,y) \geqslant 0$ ou $f(x,y) \leqslant 0$ pour tout (x,y) dans une boule $B\big((0,0), r\big)$ centrée en $(0,0)$.
- ⋄ De la même manière, on voit que $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{4}{27}$ et que $f\left(\frac{2}{3}, k\right) = -\frac{4}{27} + k^3$: il est donc impossible d'avoir $f(x,y) \geqslant -\frac{4}{27}$ ou $f(x,y) \leqslant -\frac{4}{27}$ pour tout (x,y) dans une boule $B\left(\left(\frac{2}{3}, 0\right), r\right)$ centrée en $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

En conclusion, la fonction f d'admet aucun extremum local.

✍

Exercice 2 (Différentiabilité de l'inverse des matrices). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle du premier sujet maison que le sous-ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille $n \times n$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que l'application «inverse de matrice»

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Inv} \ : & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Pour une matrice inversible $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, son inverse est égale à

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t\mathrm{Com}\, M ,$$

où $\mathrm{Com}\, M$ est la comatrice de M. On voit donc que les coefficients de l'inverse M^{-1} sont des fractions rationnelles des coefficients de la matrice M. Comme ces fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, là où elles sont définies, ceci montre que l'application Inv est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

---

(2) On considère la base canonique $\{e_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, où la matrice e_{ij} est la *matrice élémentaire* possédant un 1 à la i^{e} ligne et j^{e} colonne et des 0 partout ailleurs. Calculer les dérivées partielles de l'application Inv en la matrice identité I, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial e_{ij}}(I) , \quad \text{pour } 1 \leqslant i, j \leqslant n .$$

On rappelle la règle de multiplication des matrices élémentaires :

$$e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il} ,$$

où δ_{jk} est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $j = k$ et 0 si $j \neq k$. Par définition des dérivées partielles, elles sont égales à

$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial e_{ij}}(I) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((I + t e_{ij})^{-1} - I \right) .$$

CAS $i = j$: Pour $t \neq -1$, on a $(I + t e_{ii})^{-1} = I - \frac{t}{1+t} e_{ii}$ donc

$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial e_{ii}}(I) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(I - \frac{t}{1+t} e_{ii} - I \right) = \lim_{t \to 0} -\frac{1}{1+t} e_{ii} = -e_{ii} .$$

CAS $i \neq j$: Pour $t \neq -1$, on a $\left(I + t e_{ij}\right)^{-1} = I - t e_{ij}$ donc

$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial e_{ij}}(I) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(I - t e_{ij} - I \right) = \lim_{t \to 0} -e_{ij} = -e_{ij} .$$

Au final, les deux cas donnent le même résultat, à savoir

$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial e_{ij}}(I) = -e_{ij} , \quad \text{pour } 1 \leqslant i, j \leqslant n} .$$

---

(3) En conclure la différentielle $\mathrm{D}_I\mathrm{Inv}$ de l'application Inv en I.

La formule de la différentielle en terme de dérivées partielles donne ici

$$\boxed{\mathrm{D}_I\mathrm{Inv}(H) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(-e_{ij}) = -H}\ .$$

---

(4) Que vaut la différentielle $\mathrm{D}_M\mathrm{Inv}$ de l'application Inv en $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?

Comme la matrice M est inversible et comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout matrice $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisament petite, on a que $M + H$ est inversible, c'est-à-dire $M + H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En utilisant la différentielle de l'application Inv en l'identité I, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Inv}(M+H) = (M+H)^{-1} = M^{-1}\left(I + HM^{-1}\right)^{-1} &= M^{-1}\left(I + \mathrm{D}_I\mathrm{Inv}\left(HM^{-1}\right) + \left\|HM^{-1}\right\|\varepsilon\left(HM^{-1}\right)\right)\\ &= M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + \left\|HM^{-1}\right\| M^{-1}\varepsilon\left(HM^{-1}\right)\ .\end{aligned}$$

Pour $H \neq 0$ et $\|H\|$ suffisamment petit, on a

$$\left\|\frac{\left\|HM^{-1}\right\|}{\|H\|} M^{-1}\varepsilon\left(HM^{-1}\right)\right\| \leqslant \left\|M^{-1}\right\|^2 \left\|\varepsilon\left(HM^{-1}\right)\right\| \xrightarrow[H\to 0]{} 0\ .$$

Comme l'application $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $H \mapsto -M^{-1}HM^{-1}$ est linéaire et continue, car $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on voit que la différentielle de l'application Inv en M est égale à

$$\boxed{\mathrm{D}_M\mathrm{Inv}(H) = -M^{-1}HM^{-1}}\ .$$

✍

Exercice 3 (Calcul du wronskien). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre 2 :

$$(\star)\qquad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0\ .$$

Soient φ, ψ deux solutions de l'équation différentielle $(\star)$.

(1) Trouver une équation différentielle vérifiée par le wronskien W de φ et ψ.

Par définition, le wronskien de φ et ψ est égal à

$$\mathrm{W} = \begin{vmatrix} \varphi & \psi \\ \varphi' & \psi' \end{vmatrix} = \varphi\psi' - \varphi'\psi\ .$$

On calcule sa dérivée

$$\begin{aligned}\mathrm{W}' &= \varphi'\psi' + \varphi\psi'' - \varphi''\psi - \varphi'\psi' = \varphi\psi'' - \varphi''\psi = -\varphi\left(p\psi' + q\psi\right) + (p\varphi' + q\varphi)\psi = -\varphi p\psi' + p\varphi'\psi\\ &= -p\left(\varphi\psi' - \varphi'\psi\right) = -p\mathrm{W}\ .\end{aligned}$$

Donc le wronskien de deux solutions vérifie l'équation différentielle

$$(\triangle)\qquad \boxed{\mathrm{W}' = -p(t)\mathrm{W}}\ .$$

---

(2) Soit $a \in I$. Calculer le wronskien W de φ et ψ, en tout $t \in I$, en fonction de sa valeur $\mathrm{W}(a)$ en a.

L'équation $(\triangle)$ est une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 1. Ses solutions forment un sous-espace vectoriel de dimension 1 de l'espace $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de I vers $\mathbb{R}$. Cet espace vectoriel de solutions est engendré par toute fonction de la forme $e^{-\pi(t)}$, où $\pi(t)$ est une primitive de $p(t)$ qui peut être $\int_a^t p(s)ds$. Au final, le wronskien est donc égal à

$$\boxed{\mathrm{W}(t) = \mathrm{W}(a)e^{\int_a^t p(s)ds}}\ .$$

REMARQUE. On a vu dans le cours que les deux solutions sont linéaires indépendantes si et seulement si leur wronskien ne s'annule jamais, c'est-à-dire $\mathrm{W}(t) \neq 0$, pour tout $t \in I$. Le calcul ci-dessus permet de retrouver ce résultat. En effet, si $\mathrm{W}(a) = 0$, alors $\mathrm{W}(t) = 0$, pour tout $t \in I$, et si $\mathrm{W}(a) \neq 0$, alors $\mathrm{W}(t) \neq 0$, pour tout $t \in I$.

On considère

$$p(t) = \frac{4t-2}{2t+1} \qquad \text{et} \qquad q(t) = -\frac{8}{2t+1}\ .$$

(3) Calculer le wronskien de deux solutions de l'équation différentielle $(\star)$.

Ici on a

$$p(t) = \frac{4t-2}{2t+1} = 2\frac{2t-1}{2t+1} = 2\left(\frac{2t+1}{2t+1} - \frac{2}{2t+1}\right) = 2\left(1 - \frac{2}{2t+1}\right)\ .$$

Une primitive est donnée par

$$\pi(t) = 2\big(t - \ln(2t+1)\big)\ .$$

Donc le wronskien de deux solutions de l'équation différentielle $(\star)$ est égal à $\mathrm{W}(t) = ce^{-2(t-\ln(2t+1))}$, avec $c \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{W}(t) = ce^{-2t}(2t+1)^2}\ .$$

(4) Montrer que e^{-2t} est solution de $(\star)$.

Par un calcul direct, on a

$$\left(e^{-2t}\right)'' + \frac{4t-2}{2t+1}\left(e^{-2t}\right)' - \frac{8}{2t+1}e^{-2t} = e^{-2t}\left(4 - 2\frac{4t-2}{2t+1} - \frac{8}{2t+1}\right) = e^{-2t}\,\frac{8t+4-2(4t-2)-8}{2t+1} = 0\ .$$

(5) Décrire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\star)$.

Posons $\varphi = e^{-2t}$ la première solution et cherchons une seconde solution ψ telle que leur wronskien soit égal à $e^{-2t}(2t+1)^2$, c'est-à-dire

$$\varphi\psi' - \varphi'\psi = e^{-2t}\left(\psi' + 2\psi\right) = e^{-2t}(2t+1)^2\ .$$

Ceci donne l'équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre

$$\psi' + 2\psi = (2t+1)^2\ .$$

L'espace vectoriel de dimension 1 des solutions de l'équation homogène associée est engendrée par la fonction e^{-2t}. On utilise la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière à l'équation générale : on cherche une solution de la forme $\rho(t)e^{-2t}$. Cette dernière vérifie

$$\rho'(t)e^{-2t} = (2t+1)^2 \Longleftrightarrow \rho'(t) = (2t+1)^2e^{2t}\ .$$

En cherchant une primitive de la forme $\rho(t) = (at^2+bt+c)e^{2t}$, avec $a,b,c \in \mathbb{R}$, on voit que $\rho(t) = \left(2t^2+\frac{1}{2}\right)e^{2t}$ convient. Ceci donne que $2t^2+\frac{1}{2}$ est solution de l'équation différentielle $(\star)$, chose que l'on vérifie à la main.

Comme l'équation $(\star)$ est une équation différentielle scalaire d'ordre 2, son ensemble de solutions forme un espace vectoriel de dimension 2 qui admet pour base les deux fonctions e^{-2t} et $4t^2+1$: les solutions de l'équation différentielle $(\star)$ sont de la forme

$$\boxed{\lambda e^{-2t} + \mu\left(4t^2+1\right)\ ,\ \text{avec } \lambda,\mu \in \mathbb{R}}\ .$$

✍

Exercice 4 (Système différentiel linéaire d'ordre 2). On considère le système différentiel linéaire d'ordre 2

$$(\spadesuit) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccccccc} x'' & + & x' & + & 4y' & - & x & - & 3y & = & 0\,, \\ y'' & & & - & 3y' & + & x & + & 3y & = & 0\,. \end{array}\right.$$

où les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, avec $t \in \mathbb{R}$.

(1) Que pouvez-vous dire de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire $(\spadesuit)$?

Comme il s'agit d'un système différentiel linéaire homogène d'ordre 2 et de dimension 2, on sait que ses solutions forment un espace vectoriel de dimension $2 \times 2 = 4$.

---

(2) Donner un système differentiel $(\heartsuit)$ d'ordre 1 équivalent à $(\spadesuit)$.

En posant $Z := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système différentiel $(\spadesuit)$ s'écrit

$$Z'' + MZ' + NZ = 0\,, \quad \text{avec} \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N := \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

En considérant maintenant le «vecteur colonne par blocs» $Y := \begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix}$, l'équation différentielle $(\spadesuit)$ est équivalente à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 et de dimension 4 suivante

$$(\heartsuit) \qquad Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -N & -M \end{pmatrix}}_{A} Y\,.$$

Cette équation $(\heartsuit)$ s'écrit explicitement

$$\boxed{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix}}\,.$$

---

(3) Résoudre le système différentiel $(\heartsuit)$ d'ordre 1.

On voit que la matrice A a 4 valeurs propres distinctes $0, 1, -1, 2$ car

$$\mathrm{rg} A = \mathrm{rg}(A - I_4) = \mathrm{rg}(A + I_4) = \mathrm{rg}(A - 2I_4) = 3\,.$$

A chaque fois, la dimension du sous-espace propre associé est de dimension 1 et donc la matrice A est diagonalisable. Soit λ une valeur propre et soit X_λ un vecteur propre de A de valeur propre λ. On voit que $e^{\lambda t} X_\lambda$ est solution de l'équation différentielle $(\heartsuit)$:

$$(e^{\lambda t} X_\lambda)' = \lambda e^{\lambda t} X_\lambda = e^{\lambda t} A X_\lambda = A(e^{\lambda t} X_\lambda)\,.$$

Un calcul direct montre que $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A de valeur propre 0, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A de valeur propre 1, $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A de valeur propre -1 et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A de valeur propre 2 . On prétend donc que les quatre applications suivantes forment une base de solutions de ($\heartsuit$) :

$$\boxed{\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad e^t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad e^{-t}\begin{pmatrix}7\\-1\\-7\\1\end{pmatrix}, \quad e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}} .$$

Nous avons déjà montré qu'il s'agissait de solutions et que la dimension de l'espace des solutions est égale à 4. Il ne reste plus qu'à montrer que ces quatre solutions sont linéairement indépendantes. Soient $a, c, b, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$a\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + be^t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + ce^{-t}\begin{pmatrix}7\\-1\\-7\\1\end{pmatrix} + de^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix} = 0 .$$

En évaluant en $t = 0$, on trouve

$$a\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}7\\-1\\-7\\1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix} = 0 .$$

Comme la matrice est diagonalisable, ces quatre vecteurs propres forment une base, donc $a = b = c = d = 0$.

---

(4) **En déduire toutes les solutions du système différentiel ($\spadesuit$) d'ordre 2.**

Par définition de $Y := \begin{pmatrix}Z\\Z'\end{pmatrix}$, les deux premières coordonnées des fonctions qui donnent une base de l'équation différentielle ($\heartsuit$) donnent une base des solutions de l'équation différentielle ($\spadesuit$) :

$$\boxed{\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \quad e^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \quad e^{-t}\begin{pmatrix}7\\-1\end{pmatrix}, \quad e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} .$$

———— ✍ ————