# SUJET MAISON 2

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point.

———— ✍ ————

**Exercice 1** (Extremum local). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que l'application $f$ admet en $a$ un *minimum local* (respectivement *maximum local*) s'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in B(a,r)\,, \quad f(x) \geqslant f(a) \quad (\text{respectivement} f(x) \leqslant f(a))\ .$$

On appelle *extremum local* un minimum local ou un maximum local.

(1) On suppose que l'application $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la différentielle $\mathrm{D}_a f = 0$ s'annule en $a$ si l'application $f$ admet un extremum local en $a$.

(2) L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) \coloneqq x^2(x-1) + y^3$$

admet-elle des extrema locaux ?

———— ✍ ————

**Exercice 2** (Différentiabilité de l'inverse des matrices). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle du premier sujet maison que le sous-ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille $n \times n$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que l'application «inverse de matrice»

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Inv} \ : & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ & M & \mapsto & M^{-1} \end{array}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

(2) On considère la base canonique $\{e_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, où la matrice $e_{ij}$ est la *matrice élémentaire* possédant un 1 à la $i^{\text{e}}$ ligne et $j^{\text{e}}$ colonne et des 0 partout ailleurs. Calculer les dérivées partielles de l'application Inv en la matrice identité $I$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \mathrm{Inv}}{\partial e_{ij}}(I)\,, \quad \text{pour } 1 \leqslant i,j \leqslant n\ .$$

(3) En conclure la différentielle $\mathrm{D}_I\mathrm{Inv}$ de l'application Inv en $I$.

(4) Que vaut la différentielle $\mathrm{D}_M\mathrm{Inv}$ de l'application Inv en $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ?

———— ✍ ————

———— ✍ ————

**Exercice 3** (Calcul du wronskien). Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre 2 :

$$(\star) \qquad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0\ .$$

Soient $\varphi, \psi$ deux solutions de l'équation différentielle $(\star)$.

(1) Trouver une équation différentielle vérifiée par le wronskien $\mathrm{W}$ de $\varphi$ et $\psi$.

(2) Soit $a \in I$. Calculer le wronskien $\mathrm{W}$ de $\varphi$ et $\psi$, en tout $t \in I$, en fonction de sa valeur $\mathrm{W}(a)$ en $a$.

On considère

$$p(t) = \frac{4t-2}{2t+1} \qquad \text{et} \qquad q(t) = -\frac{8}{2t+1}\ .$$

(3) Calculer le wronskien de deux solutions de l'équation différentielle $(\star)$.

(4) Montrer que $e^{-2t}$ est solution de $(\star)$.

(5) Décrire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\star)$.

———— ✍ ————

**Exercice 4** (Système différentiel linéaire d'ordre 2). On considère le système différentiel linéaire d'ordre 2

$$(\spadesuit) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x'' & + & x' & + & 4y' & - & x & - & 3y & = & 0\,, \\ y'' & & & - & 3y' & + & x & + & 3y & = & 0\,. \end{array} \right.$$

où les solutions sont de la forme $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, avec $t \in \mathbb{R}$.

(1) Que pouvez-vous dire de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle linéaire $(\spadesuit)$ ?

(2) Donner un système différentiel $(\heartsuit)$ d'ordre 1 équivalent à $(\spadesuit)$.

(3) Résoudre le système différentiel $(\heartsuit)$ d'ordre 1.

(4) En déduire toutes les solutions du système différentiel $(\spadesuit)$ d'ordre 2.

———— ✍ ————