SUJET MAISON

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point.

Exercice 1 (Théorème du point fixe). Soit (E, N) un espace vectoriel normé complet et soit $f : E \to E$ une contraction, c'est-à-dire une application telle que

$$\exists C \in]0,1[\ ,\ \forall (x,y) \in E^2\ , \qquad \mathrm{d}(f(x), f(y)) \leqslant C\mathrm{d}(x,y)\ .$$

Montrer que l'application f admet un unique point fixe, c'est-à-dire une unique solution $x \in E$ à l'équation

$$f(x) = x\ .$$

INDICATION : On pourra considérer la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ des itérations de la fonction f.

Exercice 2 (L'espace vectoriel normé des matrices). On considère l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n \times n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients réels.

(1) Montrer que, pour toute norme N de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\ , \quad \mathrm{N}(AB) \leqslant c\mathrm{N}(A)\mathrm{N}(B)\ .$$

On considère l'application $\| - \| : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\|A\| \coloneqq \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$.

(2) Montrer que l'application $\| - \|$ définit une norme.

(3) Montrer que

$$\forall A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\ , \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|\ .$$

(4) Montrer que l'application trace $\mathrm{tr} : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.

(5) Montrer que l'application produit $(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AB \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est continue quelque soit les norme considérées sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(6) Montrer que l'application determinant $\det : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue.

(7) Montrer que le sous-ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de taille $n \times n$ est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(8) Montrer que l'application inverse $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est continue.

(9) Montrer que pour toute matrice A vérifiant $\|A\| < 1$, la matrice $I - A$ est inversible.
