FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 1

Exercice 1.

Donner un sous-ensemble à 5 éléments de l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

On considère l'ensemble $A = \{-1, 0, 1, \frac{1}{2}, 2, 5\}$ et les ensembles $B = \{0, 2, 5\}$ et $C = \{-1, 0, 1\}$.

Montrer que B et C sont des sous-ensembles de A. Calculer $B \cup C$, $B \cap C$, $A - B$ et $A - C$.

Montrer que $A \subset \mathbb{Q}$, où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationels. Calculer $A \cap \mathbb{N}$.

Exercice 3.

Rappel : *Tout nombre réel positif y peut s'écrire comme le carré d'un nombre réel $y = x^2$.*

On considère la fonction f définie par $\left\{ \begin{array}{ll} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto x^2. \end{array} \right.$

Cette fonction est-elle injective, surjective ?

On considère la fonction g définie par $\left\{ \begin{array}{ll} g: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto x^2. \end{array} \right.$

Cette fonction est-elle injective, surjective ?

On considère la fonction h définie par $\left\{ \begin{array}{ll} f: & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & x \mapsto x^2. \end{array} \right.$

Cette fonction est-elle injective, surjective ? Décrire la fonction inverse h^{-1}. A quelle fonction connue correspond h^{-1} ? Calculer $h^{-1}(g)$.

Exercice 4.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) = 5x + 17$.

Montrer que f est bijective. Déterminer f^{-1}. Vérfier par le calcul que $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}}$ et que $f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}}$.

Exercice 5.

On considère la fonction f définie par $\left\{ \begin{array}{ll} f: & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{x+2}{x+1}. \end{array} \right.$

Quel est le domaine de définition de f ?

Montrer que 1 est la seule valeur de $\mathbb{R}$ non atteinte par f.

Soit $\left\{ \begin{array}{ll} g: & \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{1\} \\ & x \mapsto \frac{x+2}{x+1}. \end{array} \right.$

Montrer que g est bien définie, bijective et calculer son inverse.

Exercice 6.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f(x) = (x + 1)(x + 2)$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto g(x) = \sqrt{x}$.

Quel est le domaine de définition de f et de g ? Décrire $g \circ f$, sans oublier le domaine de définition.

Exercice 7.

Déterminer les intersections suivantes : $]0, 1[\cap [\frac{1}{2}, 3]$ et $]0, 1[\cap [0, \frac{1}{2}[$.

Que vaut $]0, 1[- [\frac{1}{2}, 1[$?

Exercice 8.

Montrer que $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

Déterminer $\mathbb{R} - [-1, 1]$. Montrer que $[-1, 1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Majoration et minoration de valeurs absolues.

Règle : on a $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$ (essayer de le démontrer).

Soient $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ et $1 \leq y \leq 2$.
Montrer que $3 \leq |x^2 - 4y| \leq 9$.
Encadrer $\frac{|x^2-4y|}{|x|}$.