Licence de Sciences Économiques
Université de Nice Sophia-Antipolis

Année 2004-2005
Mathématiques L1

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 2

Exercice 1. On considère l'ensemble $A := \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 > 0\}$.
Dessiner A. Montrer que A est ouvert.
Montrer que $B := \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 \leq 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-il borné ?
L'ensemble $C := \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 = 0\}$ est-il fermé ? ouvert ? borné ?
L'ensemble $D := \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1^2 + x_2^2 = 9\}$ est-il fermé ? ouvert ? borné ?

Exercice 2. On considère l'ensemble $A = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}$.
Dessiner A. Montrer que A est ouvert. Quel est le complémentaire de A ?
On considère $F = \{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0\}$. Montrer que F est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Calculer dans $\mathbb{R}^2$:
- (1, 2)+(5, 0)
- (-3).(1, 2)
- (1, 2)-(5, 0)

Quelle est la distance de (1, 2) à (5, 0) ?
Soit A le point de coordonnées (1, 2) dans le plan et B le point de coordonnées (5, 0).
À quoi correspondent les points de coordonnées $(1, 2) + (5, 0)$, $(-3).(1, 2)$ et $(1, 2) - (5, 0)$?

Exercice 4. On pose $f(x_1,\, x_2) := x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 5$ et $g(x_1,\, x_2) := x_1x_2 - 5$.
Que vaut la fonction $f + g$?
Calculer $f(0, 0)$, $f(1, -1)$?

Exercice 5. On considère la fonction

$$h\ :\ (x_1,\, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + 5x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 - 4}.$$

Quelle est le domaine de définition de h ? À quoi correspond ce domaine géométriquement ?
On considère la fonction

$$k\ :\ (x_1,\, x_2) \mapsto \sqrt{h(x_1,\, x_2)}.$$

Quelle est le domaine de définition de k ? À quoi correspond ce domaine géométriquement ?

Exercice 6. On pose

$$\begin{cases} f & : \quad (x_1,\, x_2) \mapsto \dfrac{x_2}{x_1 + x_2^2}, \\ g & : \quad (x_1,\, x_2) \mapsto \dfrac{x_2}{x_1}. \end{cases}$$

Calculer la somme des fractions rationnelles $f + g$ et le quotient $\frac{f}{g}$.

Exercice 7. Posons $f(x) := \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1} + 1$.
Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle continue ?
Montrer que 0 et 1 sont adhérents à $\mathcal{D}_f$. Que vaut la limite de f en 0, en 1 ? Représenter graphiquement la fonction f.

Exercice 8. Considérons la fonction

$$f : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\, y) &\longmapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f ? En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle continue ?

Montrer que $(0,\, 0)$ et $(1,\, 1)$ sont adhérents à $\mathcal{D}_f$.

On pose

$$\begin{cases} g_1 & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ & & t \mapsto (t,\, t) \\ g_2 & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ & & t \mapsto (t,\, 2t) \\ g_3 & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ & & t \mapsto (t,\, t^2). \end{cases}$$

Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_{f \circ g_1}$ de $f \circ g_1$? En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction $f \circ g_1$ est-elle continue ?
Montrer que 1 et 0 sont adhérents à $\mathcal{D}_{f \circ g_1}$. Montrer que $f \circ g_1$ admet une limite en 1 et la calculer.
Montrer que $f \circ g_1$ admet une limite en 0 et la calculer.
Mêmes questions avec $f \circ g_2$ et $f \circ g_2$.

Peut-on dire que f admette une limite en $(0,\, 0)$?