Licence de Sciences Économiques — Année 2004-2005
Université de Nice Sophia-Antipolis — Mathématiques L1

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 3

Exercice 1. On considère la fonction $\left\{\begin{array}{l} f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \quad (x_1,\, x_2) \mapsto x_1^2 + x_2^2. \end{array}\right.$

Quel est son domaine de définition ? Pourquoi cette fonction est continue ?
Posons $A = \{(x_1,\, x_2) \in {\mathbb{R}^+}^2\ ;\ x_1 + x_2 = 1\}$. Représenter graphiquement A.
Montrer que A est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$.
Montrer que la fonction f admet un maximum M et un minimum m sur A et qu'ils sont atteints.
Que valent M et m ? Où sont-ils atteints ?

Exercice 2. Une ménagère achète un adoucissant P_1 et une lessive P_2. Le prix de l'adoucissant P_1 est p_1 et le prix de la lessive P_2 est p_2. Elle achète des deux produits pour un panier global de 10 euros. Posons x_1 la quantité d'adoucissant achetée et x_2 la quantité de lessive achetée.
Écrire l'équation qui représente la valeur du panier acheté.

On modélise l'utilité du panier par la fonction $\left\{\begin{array}{l} f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \quad (x_1,\, x_2) \mapsto \ln(x_1+1) + 2\ln(x_2+1). \end{array}\right.$

Existe-t-il une utilité optimale ? Si oui pour quelles quantités achetées ? On pose $\alpha(p_1,\, p_2)$ la quantité de lessive achetée dans ce cas. Que se passe-t-il si $2p_1 \leqslant p_2+10$ et si $2p_1 \geqslant p_2+10$? Commenter ces résultats.

Quel est le signe de $\dfrac{\partial \alpha}{\partial p_1}$ et de $\dfrac{\partial \alpha}{\partial p_2}$? Commenter.

Si l'adoucissant coute 2 euros et la lessive 5 euros, en quelles proportions faut-il acheter les deux produits pour un résultat maximal ? Commenter.

Exercice 3. Soit f la fonction polynomiale défnie par $f(x) := x^4 + x^3 - 55x^2 - 45x + 36$.
Calculer $f(-2)$, $f(0)$ et $f(1)$. Montrer que f s'annule entre -2 et 0 et entre 0 et 1.

Exercice 4. Soit $f\ :\ [0,\, 1] \to [0,\, 1]$ une fonction continue croissante.
Montrer que f admet au moins un point fixe (c'est-à-dire une solution à l'équation $f(x) = x$).

Exercice 5. Soit f la fonction définie par $\left\{\begin{array}{l} f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \dfrac{2}{1+e^{-4x^3}}. \end{array}\right.$

Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f est continue et strictement croissante (sans utiliser la dérivée).
En déduire que la valeur $\dfrac{e}{2}$ est atteinte une seule fois par f.
Préciser si $\dfrac{e}{2}$ est l'image d'un nombre positif ou negatif.

Exercice 6. Calculer $81^{\frac{1}{4}}$, $256^{\frac{3}{8}}$ et $125^{-\frac{1}{3}}$.
Calculer $\ln(e^{\frac{1}{2}}) + \ln(\frac{1}{2}) + \ln(4\sqrt{2}) - \ln 2$.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes

(1) $$2e^{2x} - 9e^x + 7 = 0,$$

(2) $$5^x = 3^{x^2},$$

(3) $$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}.$$