FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS 4

Exercice 1.
Préciser le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \dfrac{5}{x^5} - \dfrac{1}{x^7}$ **2**. $x \mapsto \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^3}}$ **3**. $x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$

4. $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ **5**. $x \mapsto \cos(\cos x)$ **6**. $x \mapsto \sin(\sqrt{3x+1})$

7. $x \mapsto e^{2x^2+1}$ **8**. $x \mapsto \ln \dfrac{1}{3x-1}$ **9**. $x \mapsto 3^{\frac{1}{x}}$

Exercice 2.
Pour les fonctions suivantes, préciser leur domaine de définition, leur domaine de dérivabilité et calculer leurs dérivées partielles.

1. $(x, y) \mapsto \ln(1+x) + 2\ln(1+y)$ **2**. $(x, y) \mapsto 10\, x^{\frac{1}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}}$ **3**. $(x, y) \mapsto (3x+2y)^{\frac{1}{2}}$

4. $(x, y) \mapsto \sqrt{xy}$ **5**. $(x, y) \mapsto \sqrt{2x^2 + 3y^2}$ **6**. $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^{\frac{1}{4}} x_2^{\frac{1}{4}} x_3^{\frac{1}{2}}$

Déterminer quelles fonctions sont homogènes. Donner leur degré et vérifier l'identité d'Euler.

Préciser si les fonctions vérifient les hypothèses du théorème de Schwarz et retrouver le résultat.

Exercice 3.
Quelle est la formule de la dérivée de $f \circ g \circ h$?

Application : Calculer la dérivée de $\ln\left(\sqrt{3 + \dfrac{2}{x}}\right)$.

Exercice 4.
Donner une équation de la tangente au graphe de f, au point P où

(1) $f(x) = 5(1+x^2)^{-1}$ et $P = (-2, 1)$.
(2) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x}$ et $P = (4, 44)$.

Exercice 5.
En quel(s) point(s) la courbe d'équation $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ admet-elle un tangente

(1) horizontale ?
(2) parallèle à la droite d'équation $2y + 8x = 1$?

Exercice 6.
Donner sans calcul la tangente à $y = 1 + 2x + x^4$ au point d'abscisse 0 et la position de la courbe par rapport à la tangente en ce point.

Exercice 7.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Que dire de la dérivée de f si f est paire, si f est impaire et si f est périodique ?

Exercice 8.
En quels points la fonction $x \mapsto |\sin x|$ est-elle dérivable ? En quels points admet-elle des dérivées à gauche ou à droite ?

Exercice 9.

On considère la fonction $\begin{cases} f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \qquad (x,\, y) \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+y^2}. \end{cases}$

Pourquoi f est-elle continue et admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?

Montrer que f admet un maximum global et préciser en quel point il est atteint.

Exercice 10.

Pour $t > 0$ et $l > 0$, on considère la fonction $u(t,\, l) = \dfrac{7tl}{l+7t}$.

Calculer $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Chercher les points critiques de u.

Déterminer les couples $(t,\, l)$ tels que $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,\, l) = \dfrac{\partial u}{\partial l}(t,\, l)$.

Chercher si u admet un maximum lorsque $t + l = 24$.