I Graphes et lignes de niveaux

1 Etudes de sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$

Sur un plan euclidien, nous choisissons un repère orthonormé qui l'identifie à $\mathbf{R}^2$. Si $M = (a_1,a_2)$ et $N = (b_1,b_2)$ sont deux points du plan, rappelons que la distance de M à N est :

$$d(M,N) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \quad .$$

1) Droite du plan :

Soit D une droite du plan. Nous savons qu'il existe trois réels (a,b,c) avec $(a,b) \neq (0,0)$ tels que D est l'ensemble des points M de coordonnées (x_1,x_2) tels que :

$$ax_1 + bx_2 = c \quad .$$

Nous dirons que $ax_1 + bx_2 = c$ est une équation de D.

Une droite peut avoir plusieurs équations . Par exemple, la droite d'équation $x_1 - x_2 = 2$ est aussi la droite d'équation $2x_1 - 2x_2 = 4$.

Représentation graphique de la droite D d'équation $ax_1 + bx_2 = c$:

Cas $b = 0$: La droite D a pour équation $x_1 = \frac{c}{a}$. Elle est parallèle à l'axe des x_2.

Cas $a = 0$: La droite D a pour équation $x_2 = \frac{c}{b}$. Elle est parallèle à l'axe des x_1.

Cas $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$: La droite D a pour équation $ax_1 + bx_2 = 0$. Elle passe par l'origine $(0,0)$ et par le point $C = (-b,a)$. La droite D est donc la droite (OC).

Cas $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$: La droite D passe par les points $A = (\frac{c}{a},0)$ et le point $B = (0,\frac{c}{b})$ qui sont distincts. La droite D est donc la droite (AB).

Qand c varie les droites d'équations $ax_1 + bx_2 = c$ forment une famille de droites parallèles.

Proposition 1.1 *Les droites d'équation* $ax_1 + bx_2 = c$ *et* $a'x_1 + b'x_2 = c'$ *sont parallèles si et seulement si* $ab' - ba' = 0$.

Exercice : Trouver m pour que la droite $D(m)$ d'équation $2x_1 + mx_2 = 7$ soit parallèle à la droite d'équation $x_1 + 2x_2 = 4$. Réponse : $m = 4$.

Exemple de variations des coefficients :

Supposons que a,b,c sont trois réels strictement positifs. Fixons b et c et considérons la droite $D(a)$ d'équation $ax_1 + bx_2 = c$. Pour $0 < a' < a < a''$ la situation des droites $D(a')$, $D(a)$ et $D(a'')$ est donnée par le dessin ci-dessous :

Dessin

Equation réduite d'une droite :

Pour $b \neq 0$, la droite d'équation $ax_1 + bx_2 = c$ a aussi pour équation :

$$x_2 = -\frac{a}{b}x_1 + \frac{c}{b} \quad .$$

Cette équation est appelée équation réduite de D. Le réel $-\frac{a}{b}$ est aussi appelé la pente de D.

Demi plan délimité par une droite :

Soit D la droite d'équation $x_1 - 2x_2 = 2$. Représenter :

$$A = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \; ; \; x_1 - 2x_2 > 2\} \quad .$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} x_1 - 2x_2 > 2 & , \\ 2x_2 > 2 - x_1 & , \\ x_2 < -1 + \frac{1}{2}x_1 & . \end{array}$$

L'ensemble A est l'ensemble hachuré dans le dessin ci-dessous :

dessin :

L'ensemble A est appelé demi-plan délimité par D.

2) Segment du plan :

Soit $A = (a_1,a_2)$, $B = (b_1,b_2)$ deux points du plan. Le segment AB est l'ensemble des points M de coordonnées (x_1,x_2) tels qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ vérifiant :

$$\begin{array}{l} x_1 = \lambda a_1 + (1-\lambda) b_1 \quad , \\ x_2 = \lambda a_2 + (1-\lambda) b_2 \quad . \end{array}$$

Ainsi, les coordonnées de M sont une moyenne pondérée des coordonnées de A et B.

Définition 1.2 *(ensemble convexe dans $\mathbf{R}^n$) Un sous-ensemble X de $\mathbf{R}^n$ est dit convexe si dès que deux points $A = (a_1,\ldots,a_n)$ et $B = (b_1,\ldots,b_n)$ sont dans X, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$:*

$$(\lambda a_1 + (1-\lambda) b_1 \ldots, \lambda a_n + (1-\lambda) b_n) \in X \quad .$$

Autrement dit un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ (resp. $\mathbf{R}^n$) est convexe si dès qu'il contient deux points, il contient le segment d'extrémités ces deux points.

Exemple : Un demi-plan de $\mathbf{R}^2$ est convexe.

2) Cercle :

Soit $R > 0$ un réel et $\Omega = (\omega_1,\omega_2)$ un point de $\mathbf{R}^2$. Le cercle C de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points $M = (x_1,x_2)$ du plan vérifiant :

$$d(M,\Omega) = R$$

ou :

$$\sqrt{(x_1-\omega_1)^2 + (x_2-\omega_2)^2} = R \quad ,$$

ou encore :

$$(x_1-\omega_1)^2 + (x_2-\omega_2)^2 = R^2 \ .$$

Exercice : Montrer que l'ensemble E des points $M = (x_1,x_2)$ de $\mathbf{R}^2$ vérifiant l'équation : $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2 + x_1 = 3$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Solution : Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{l} 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2 + x_1 = 3 \quad , \\ x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 = \frac{3}{2} \quad , \\ (x_1 + \frac{1}{4})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \quad , \\ (x_1 + \frac{1}{4})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 = \frac{29}{16} \quad . \end{array}$$

L'ensemble E est donc le cercle de centre $-\frac{1}{4},\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{\sqrt{29}}{4}$.

Montrer que l'ensemble E' des points $M = (x_1,x_2)$ de $\mathbf{R}^2$ vérifiant l'équation :

$$2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2 + x_1 < 3$$

est le disque (sans sont bord) de centre $(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{29}}{4}$.

Les équations suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{l} 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2 + x_1 < 3 \quad , \\ x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 - x_2 < \frac{3}{2} \quad , \\ (x_1 + \frac{1}{4})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} < \frac{3}{2} \quad , \\ (x_1 + \frac{1}{4})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 < \frac{29}{16} \quad . \end{array}$$

Donc E' est l'ensemble des points situés à une distance strictement inférieur à $\frac{\sqrt{29}}{4}$ du point $(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})$. On peut montrer que cet ensemble est un ouvert, borné et convexe de $\mathbf{R}^2$.

Ellipse :

Soit $0 < c < a$ deux réels strictement positifs. Notons $F = (c,0)$ et $F' = (-c,0)$. Nous appelons ellipse de foyer F et F' l'ensemble des points M du plan tels que :

$$d(M,F) + d(M,F') = 2a \quad .$$

On peut vérifier que cet ensemble $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x_1,x_2) vérifient l'équation :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{oú} \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad .$$

Exercice : Montrer que l'ellipse $\mathcal{E}$ est un ensemble fermé borné de $\mathbf{R}^2$.

Solution : Considérons l'application polynomiale, donc continue :

$$\mathbf{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbf{R} \quad , \quad (x_1,x_2) \mapsto \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \quad .$$

Par définition :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} & = & \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad ; \quad f(x_1,x_2) = 1\} \quad , \\ & = & \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad ; \quad f(x_1,x_2) \in \{1\}\} \quad . \end{array}$$

Comme l'ensemble $\{1\}$ est fermé dans $\mathbf{R}$ et que f est continue, il résulte de la proposition que $\mathcal{E}$ est un ensemble fermé de $\mathbf{R}^2$.

Si $(x_1,x_2) \in \mathcal{E}$, nous avons :

$$\frac{x_1^2}{a^2} \leq \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \quad \text{et donc} x_1^2 \leq a^2 \quad .$$

De même, $x_2^2 \leq b^2$. Ainsi, $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq a^2 + b^2$. L'ellipse $\mathcal{E}$ est donc contenue dans le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$. Elle est donc bornée.

Pour dessiner l'ellipse $\mathcal{E}$, on peut fixer une corde de longueur $2a$ aux foyers F et F' et se deplacer la corde tendue autour de F et F'. Plus algébriquement, on peut remarquer que l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le demi-plan $x_2 \geq 0$ est donnée par l'équation :

$$x_2 = b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} \quad \text{et} \quad -a \leq x_1 \leq a \quad .$$

La représentation de l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le demi-plan $x_2 \geq 0$ s'obtient donc en étudiant la fonction :

$$[-a,a] \xrightarrow{f} \mathbf{R} \quad , \quad x_1 \mapsto x_2 = f(x_1) = b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}} \quad .$$

La fonction f est dérivable sur $]-a,a[$ et pour tout $x_1 \in]-a,a[$:

$$f'(x_1) = \frac{b}{a^2}\frac{x_1}{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}$$

Le tableau de variation de f est :

tableau

D'où la représenation de l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le demi-plan $x_2 \geq 0$:

dessin

Pour obtenir la représentation graphique de $\mathcal{E}$, il reste à remarquer que $\mathcal{E}$ est invariant sous l'action de la symétrie orthogonal d'axe l'axe des x_1; c'est à dire :

$$(x_1,x_2) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow (x_1,-x_2) \in \mathcal{E} \quad .$$

Remarque : On pourra montrer que l'intérieur de l'ellipse caractérisé par l'inéquation:

$$d(M,F) + d(M,F') < 2a \quad \text{ou} \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1$$

est une ensemble convexe de $\mathbf{R}^2$.

Hyperbole :

Soit $0 < a < c$ deux réels strictement positifs. Notons $F = (c,0)$ et $F' = (-c,0)$. Nous appelons hyperbole de foyer F et F' l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\mid d(M,F) + d(M,F') \mid = 2a \quad .$$

On peut vérifier que cet ensemble $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points M dont les coordonnées (x_1,x_2) vérifient l'équation :

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1 \quad \text{oú} \quad b^2 = c^2 - a^2 \quad .$$

Ainsi, l'intersection de $\mathcal{H}$ avec le demi-plan $x_1 \geq 0$ est l'ensemble des points $M = (x_1,x_2)$ vérifiant l'équation :

$$x_1 = a\sqrt{\frac{x_2^2}{b^2} + 1}$$

et cette intersection s'obtient dons par l'étude de la fonction :

$$\mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R} \quad , \quad x_1 \mapsto x_1 = g(x_2) = b\sqrt{\frac{x_2^2}{b^2} + 1} \quad .$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout x_2 réel :

$$g'(x_2) = \frac{a}{b^2}\frac{x_2}{\sqrt{\frac{x_2^2}{b^2} + 1}} \quad .$$

Le tableau de variation de g est :

dessin :

De plus, $\lim_{x_2 \to +\infty} \frac{g(x_2)}{x_2} = \frac{a}{b}$, $\lim_{x_2 \to -\infty} \frac{g(x_2)}{x_2} = -\frac{a}{b}$, $\lim_{x_2 \to +\infty} g(x_2) - \frac{a}{b}x_2 = 0$ et $\lim_{x_2 \to -\infty} g(x_2) + \frac{a}{b}x_2 = 0$. Donc, la courbe représentative de g a en $+\infty$ (resp. $-\infty$) la droite d'équation $x_1 - \frac{a}{b}x_2 = 0$ (resp. $x_1 + \frac{a}{b}x_2 = 0$) comme asymptote. On obtient la représentation de $\mathcal{H}$:

dessin :

Parabole :

Considérons dans le plan la droite D d'équation $x_1 = p$ où $p > 0$ est un réel. L'ensemble $\mathcal{P}$ des points $M = (x_1,x_2)$ tels que la distance de M à la droite soit égale à la distance de M à l'origine est appelé une parabole. Traduisons que $M=(x_1,x_2)$ appartient à $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}(x_1-p)^2 &= x_1^2+x_2^2 \quad ,\\ -2x_1p+p^2 &= x_2^2 \quad ,\\ x_1 &= -\frac{1}{2p}x_2^2+\frac{p}{2} \quad .\end{aligned}$$

Ainsi, une $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points vérifiant :

$$-2x_1p+p^2=x_2^2 \quad .$$

La parabole $\mathcal{P}$ est donc la courbe représentative de la fonction :

$$h:\mathbf{R}\to\mathbf{R} \quad , \quad x_2\mapsto h(x_2)=-\frac{1}{2p}x_2^2+\frac{p}{2}$$

La fonction h est dérivable. Pour tout x_2 réel :

$$h'(x_2)=-\frac{x_2}{2p} \quad .$$

La fonction h est paire et $\mathcal{P}$ admet donc l'axe des x_1 comme axe de symétrie. Le tableau de variation de h est donc : Enfin, $\lim_{x_2\to+\infty}\frac{h(x_2)}{x_2} == \infty$. Nous en déduisons l'allure de la courbe représenative de $\mathcal{P}$.

dessin :

Coniques :

Considérons des réels a,b,c,d,e,f tels que a,b,c ne soient pas simultanément nuls. Alors, on peut montrer que l'ensemble des points (x_1,x_2) vérifiant l'équation :

$$ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+dx_1+ex_2+f=0$$

est soit vide, soit un cercle, soit une ellipse, soit une hyperbole ou la réunion de deux droites. Ces ensembles sont appelés les coniques du plan.

2 Graphe d'une fonction numérique d'une variable

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'extrémités $c<d$ (c ou d pouvant être respectivement $+\infty$ où $-\infty$).

Définition 2.1 *Soit une fonction* $f:I\to\mathbf{R}$, $x_1\mapsto x_2=f(x_1)$. *Le sous-ensemble de* $\mathbf{R}^2$ *:*

$$G_f=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2 \ ; \ x_1\in I \quad \text{et} \quad x_2=f(x_1)\}$$

est appelé le graphe de f.

Exemple : Considérons la fonction :

$$f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R} \quad , \quad x_1 \mapsto x_2 = \frac{1}{x_1} \quad .$$

La fonction f est décroissante. Nous avons :

$$\lim_{x_1 \to 0^+} f(x_1) = \lim_{x_1 \to 0^-} f(x_1) = 0 \quad .$$

Nous obtenons l'allure de G_f :

dessin :

L'étude d'une fonction f et notamment de son tableau de variation permet de donner l'allure de G_f et de le représenter graphiquement.

Inversement, si G est le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$, $x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$. la donnée de G permet de retrouver f. D'une part, I est la projection de G sur l'axe des x_1 parallélement à l'axe des x_2. D'autre part, soit $x_1 \in I$. Nous avons $(x_1,f(x_1)) \in G$ et si $(x_1,x_2) \in G$, alors $x_2 = f(x_1)$. Autrement écrit, si $x_1 \in I$, G contient un seul point d'abscisse x_1. L'ordonnnée de ce point est $f(x_1)$.

Les données de f et de son graphe étant équivalente, nous disons aussi que le graphe de f est la courbe repésentative de f.

Exemple : Le cercle C de centre $(0,0)$ et de rayon 1 n'est pas la courbe représentative d'une fonction $f : I \to \mathbf{R}$, $x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$. En effet il y a sur C des points distincts ayant même abscisse. Par contre les points de C d'ordonnée positive sont le graphe de la fonction :

$$[-1,1] \to \mathbf{R} \quad , \quad x_1 \mapsto \sqrt{1 - x_1^2} \quad .$$

Au graphe G_f d'une fonction f, nous pouvons associer naturellement quatre sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x_1 \in I \quad \text{et} \quad x_2 > f(x_1)\} \quad , \\ B &= \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x_1 \in I \quad \text{et} \quad x_2 < f(x_1)\} \quad , \\ C &= \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x_1 \in I \quad \text{et} \quad x_2 \geq f(x_1)\} \quad , \\ D &= \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x_1 \in I \quad \text{et} \quad x_2 \leq f(x_1)\} \quad . \end{aligned}$$

L'ensemble A est l'ensemble des points situés strictement au-dessus du graphe de f, B celui des points strictement en-dessous, C celui des points au-dessus et D celui des points au-dessous.

Exercice : On pourra montrer que si I est fermé (par exemple $I = \mathbf{R}$ ou $I = [c,d]$) et que f est continue, alors le graphe de f et les ensembles C et D sont des fermés de $\mathbf{R}^2$.

Tangente aux points d'un graphe :

Soit $f : I \to \mathbf{R}$, $x_1 \mapsto x_2 = f(x_1)$. une fonction et $A = (a,f(a)) \in G_f$. Considérons alors $B = (b,f(b)) \in G_f$ un point différent de A. La droite (AB) est appelé une sécante au graphe en A. Son équation est :

$$x_2 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_1 - a) + f(a) \quad .$$

Sa pente est $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Si f est dérivable en a, f est alors continue en A et on peut montrer que :

$$\lim_{B \to A, B \in G_f, B \neq A} \text{ pente de } AB = \lim_{x_1 \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a) \quad .$$

Ainsi, lorsque B tend vers A la sécante (AB) tend vers la droite déquation :

$$x_2 = f'(a)(x_1 - a) + f(a)$$

appelée tangente en $(a,f(a))$ à G_f.

Définition 2.2 *Si f est dérivable en a, la droite d'équation :*

$$x_2 - f(a) = f'(a)(x_1 - a)$$

est appelé la tangente en $(a,f(a))$ à G_f.

La tangente en $(a,f(a))$ à G_f est encore la droite de pente $f'(a)$ passant par le point $(a,f(a))$.

Position du graphe d'une fonction et d'une droite sécante :

Nous souhaitons préciser la position d'une droite D sécante au graphe G_f d'une fonction f. Si la droite D est contenue dans l'ensemble des points situés au-dessus de G_f nous disons qu'elle est au-dessus du graphe de f, si elle est dans l'ensemble des points situés en-dessous de G_f, nous disons qu'elle est en-dessous du graphe de f, si elle n'est contenue dans aucun de ces sous-ensembles nous disons qu'elle traverse le graphe de f.

Proposition 2.3 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'extrémités $c < d$.*
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable en un point $a \in]c,d[$. Alors, si une droite D passant par $(a,f(a))$ est du même coté du graphe de f, c'est que D est la tangente au graphe de f en $(a,f(a))$.

Preuve : Si la droite D est verticale, il est clair qu'elle traverse le graphe de f. Considérons alors une droite D passant par $(a,f(a))$ et non verticale. Soit p sa pente, l' équation de D est alors :

$$x_2 = p(x_1 - a) + f(a) \quad .$$

Supposons par exemple que D soit au-dessus du graphe de f. Pour tout $x_1 \in I$, nous avons donc :

$$p(x_1 - a) + f(a) \geq f(x_1)$$

Considérons la fonction $g : I \to \mathbf{R}$, $x_1 \mapsto p(x_1 - a) + f(a) - \geq f(x_1)$ Cette fonction est donc à valeurs positives. Elle s'annule en a car la droite D passe par le point $(a,f(a))$. Ainsi, g admet un minimum en a. Comme g est dérivable en a, il résulte de la proposition **??** que $g'(a) = 0$. Nous en déduisons $p = f'(a)$. Cela montre que D est la tangente au graphe de f en $(a,f(a))$.

Proposition 2.4 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'extrémités $c < d$.*
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ admettant une dérivée seconde positive (resp. négative) une fonction sur $]c,d[$. Alors, les tangentes au graphe de f sont en-dessous (resp. au-dessus) du graphe de f.

Preuve : La tangente au graphe de f en $(a,f(a))$ est en-dessous (resp. au-dessus) du graphe de f si et seulement si pour tout $x_1 \in I$:

$$g(x_1) = p(x_1 - a) + f(a) - f(x_1) \geq 0 \quad (\text{resp. } \leq 0) \quad .$$

La proposition résulte alors de l'étude du tableau de variation de la fonction g.

Position relative des graphes de deux fonctions :

Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions. Nous disons plus généralement que le graphe de g est au-dessus de celui de f (resp. en-dessous) si le graphe de g est contenu dans l'ensemble des points situés au-dessus du graphe de f (resp. en-dessous). Le graphe de f est alors en-dessous de celui de g (resp. au-dessus). Les propositions précedentes se généralisent.

Proposition 2.5 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'extrémités $c < d$.*
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions. deux fonctions dérivables en un point $a \in]c,d[$ tels que $f(a) = g(a)$. Alors, si le graphe de g est du même coté que celui de f, c'est que les graphes de f et g ont la même tangente en $(a,f(a))$.

Proposition 2.6 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ d'extrémités $c < d$.*
Soit $f : I \to \mathbf{R}$ et $g : I \to \mathbf{R}$ deux fonctions admettant des dérivées secondes telles que $f'' - g''$ soit positive (resp. négative) sur $]c,d[$. Soit $a \in]c,d[$ tel que $f'(a) = g'(a)$ et $f(a) = g(a)$ (autrement dit le graphe de f et de g se coupent en $(a,f(a)$ et ont même tangente en ce point. Alors le graphe de f est au-dessus de celui de g (resp. en-dessous).

Fonction convexe d'une variable :

Définition 2.7 *Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ est dite convexe si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1) la partie située au-dessus du graphe de f est convexe,

2) pour tout $x,y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad .$$

Si la partie située en-dessous du graphe de f est convexe, on dit alors que f est concave. Cela équivaut à demander que pour tout $x,y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \quad .$$

Proposition 2.8 *Si f est convexe et dérivable en un point a, alors la tangente en $(a,f(a))$ au graphe de f est en-dessous du graphe de f.*

Proposition 2.9 *Soit une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ définie sur un intervalle ouvert I et deux fois dérivables sur I. Alors, f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I.*

Exemple : La fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 2x^2 - x + 1$ est convexe.

Lignes de niveau d'une fonction numérique de deux variables :

Soit U un sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ et $f : U \to \mathbf{R}$. Nous appelons ligne de niveau de f tout sous-ensemble de U définie par l'équation $f(x_1,x_2) = k$ où k est un réel fixé.

Exemple : Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$.
Les lignes de niveaux de f sont les ensembles d'équation :

$$x_1^2 + 2x_2^2 = k$$

Ceux sont :

$$\begin{cases} \emptyset & \text{pour} \quad k < 0 \ , \\ \{(0,0)\} & \text{pour} \quad k = 0 \ , \\ \text{une ellipse} & \text{pour} \quad k > 0 \ . \end{cases}$$

Exemple : Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2$. Les lignes de niveaux de f sont les droites parallèles de pente $-\dfrac{1}{2}$.

3 Théorème des fonctions implicites et extremum avec contrainte (deux variables)

Une problème qui se pose lorsque l'on dispose d'une fonction f est de représenter ses lignes de niveaux. Une méthode est de réussir à exprimer les solutions de l'équation :

$$f(x_1,x_2) = k$$

comme les éléments du graphe d'une fonction de x_2 ou de x_1. Le théorème suivant nous donne une condition pour que cela soit localement possible.

Théorème des fonctions implicites 3.1 *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ admettant des dérivées partielles continues* *sur U, k un réel et $a=(a_1,a_2)\in U$ tel que $f(a_1,a_2)=k$.*

a) Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\neq 0$, il existe I intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant a_1, il existe J intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant a_2 et $g : I\to\mathbf{R}$ admettant une dérivée continue sur I tels que :

$$\begin{array}{l}(x_1,x_2)\in I\times J\\ f(x_1,x_2)=k\end{array} \iff \begin{array}{l}x_1\in I\\ x_2=g(x_1)\end{array} \quad .$$

b) Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\neq 0$, il existe I intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant a_1, il existe J intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant a_2 et $h : J\to\mathbf{R}$ admettant une dérivée continue sur J tels que :

$$\begin{array}{l}(x_1,x_2)\in I\times J\\ f(x_1,x_2)=k\end{array} \iff \begin{array}{l}x_2\in J\\ x_1=h(x_2)\end{array} \quad .$$

Sous les hypothèses précédentes, les limites des sécantes (ba) où $b=(b_1,b_2)$ vérifie $f(b_1,b_2)=k$ et tend vers a coïncide avec la droite d'équation :

$$(x_1-a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)+(x_2-a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)=0 \quad .$$

Cette droite est appelée la tangente en A à l'ensemble d'équation :

$$f(x_1,x_2)=k \quad .$$

Ce théorème permet de donner une condition nécessaire à l'existence d'un extremum d'une fonction numérique f de deux variables sous la contrainte que les valeurs de f vérifient une équation $g(x_1,x_2)=0$.

Proposition 3.2 *Soit $f : U\to\mathbf{R}$, $g : U\to\mathbf{R}$ deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ et admettant des dérivées partielles continues. Soit k un réel, désignons par H le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$:*

$$H=\{(x_1,x_2)\ ;\ x_1,x_2\in U \quad \text{et} \quad g(x_1,x_2)=k\} \quad .$$

Soit $a=(a_1,a_2)$ un point de H ($g(a_1,a_2)=k$)) et supposons que la restriction de f à H admette un extremum local en a. Alors les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

1) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,a_2)-\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,a_2)=0 \quad .$

2) $A=(a_1,a_2)$ est un point critique de g ou il existe $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que (a_1,a_2,λ) soit un point critique de la fonction :

$$h : U\times\mathbf{R}\to\mathbf{R} \quad , \quad (x_1,x_2,\lambda)\mapsto f(x_1,x_2)+\lambda(g(x_1,x_2)-k) \quad .$$

Dans la pratique, ces conditions sont très utiles pour déterminer les extrema locaux de fonctions de deux variables sous une contrainte.

Compte-tenu de la définition de point critique, a est un point critique de g se traduit par

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,a_2)=\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,a_2)=0$$

et l'existence de $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que (a_1,a_2,λ) soit un point critique de h se traduit par :

$$0=g(a_1,a_2)-k=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}(a_1,a_2)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)-\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}(a_1,a_2) \quad .$$

Remarque 3.3 Ces conditions n'expriment rien d'autre que si elles existent, les tangentes en (a_1,a_2) aux sous-ensembles H et à la ligne de niveau de f: $f(x_1,x_2)=f(a_1,a_2)$ sont identiques.

4 Généralisation à plus de deux variables

Nous allons donner quelques généralisations pour un nombre quelconque de variables des concepts et résultats précédents concernant les graphes de fonctions d'une variable ou les lignes de niveaux de fonctions de deux variables.

Définition du graphe d'une fonction 4.1 *Soit :*

$$f : U\to\mathbf{R}\ ,\ (x_1,\ldots,x_n)\mapsto x_{n+1}=f(x_1,\ldots,x_n)$$

une fonction définie sur un sous-ensemble U de $\mathbf{R}^n$. Le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n+1}$:

$$G_f=\{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\ ;\ (x_1,\ldots,x_n)\in U \text{ et } x_{n+1}=f(x_1,\ldots,x_n)\}$$

est appelé le graphe de f.

Comme pour les fonctions d'une seule variable, la donnée d'une fonction f et de son graphe sont équivalente.

L'ensemble A des points situés par exemple strictement au-dessus du graphe de $f : U \to \mathbf{R}$ se définit comme à une variable :

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \; ; \; (x_1, \ldots, x_n) \in U \text{ et } x_{n+1} > f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Définition de l'espace tangent en un point d'un graphe 4.2 *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction défine sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et admettant des dérivées partielles continues sur U. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$, le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n+1}$ définie par l'équation polynomiale de degré un :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) + x_{n+1} - f(a) = 0$$

est appelé espace tangent en a au graphe de f.

Définissons maintenant une fonction convexe dont la source est un ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$.

Définition 4.3 *Une fonction $f : U \to \mathbf{R}$ définie sur un sous-ensemble U convexe de $\mathbf{R}^n$ est dite convexe si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1) la partie située au-dessus du graphe de f est convexe,

2) pour tout $x, y \in U$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \quad .$$

Ligne de niveaux d'une fonction numérique de plusieurs variables :

Soit U un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ et $f : U \to \mathbf{R}$. Nous appelons ligne de niveau de f tout sous-ensemble de U définie par l'équation $f(x_1, \ldots, x_n) = k$ où k est un réel fixé.

Le probléme de la représentation des lignes de niveaux d'une fonction dépendant d'un nombre fini tient à l'impossibilité de donner des représentations géométriques dans des espaces de grandes dimension. Savoir qu'une ligne de niveaux est localement le graphe d'une fonction est très utile. Cela permet paramétrer la ligne de niveaux.

Théorème des fonctions implicites 4.4 *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ admettant des dérivées partielles continues sur U, k un réel et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ tel que $f(a) = k$. Si pour un indice $1 \leq i \leq n$, nous avons $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0$, alors "$f = k$ est localement le graphe d'une fonction de $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$" :*
Il existe V intervalle ouvert de $\mathbf{R}^{n-1}$ contenant $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, il existe J intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ contenant a_i et $g : V \to \mathbf{R}$ admettant des dérivées partielles continues sur V tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in U \times J \\ f(x) = k \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in V \\ x_i = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{array} \right. .$$

Sous les hypothèses précédentes, les limites des sécantes (ba) où $b \in U$ vérifie $f(b) = k$ et tend vers a décrivent l'ensemble d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) = 0$$

appelé espace tangent à $f = k$ en a.

Ce théorème permet de donner une condition nécessaire à l'existence d'un extremum d'une fonction numérique f de plusieurs variables sous la contrainte que les valeurs de f vérifient une équation $g(x_1, \ldots, x_n) = k$.

Proposition 4.5 *Soit $f : U \to \mathbf{R}$, $g : U \to \mathbf{R}$ deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ et admettant des dérivées partielles continues. Soit k un réel, désignons par H le sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$:*

$$H = \{x \in U \quad \text{tel que} \quad g(x_1, \ldots, x_n) = k\} \quad .$$

Soit $a = (a_1, \ldots a_n)$ un point de H ($g(a) = k$)) et supposons que a soit extremum local de la restriction de f à H. Alors,
soit a est un point critique de g,
soit il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $(a_1, \ldots, a_n, \lambda)$ soit un point critique de la fonction :

$$f : U \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad , \quad (x_1, \ldots, x_n, \lambda) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda(g(x_1, \ldots, x_n) - k) \quad .$$

5 Compléments sur les extrema locaux d'une fonction numérique

Considérons $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. Nous avons vu que si f admet des dérivées partielles continues et que si en $(a_1,a_2) \in U$, f admet un extremum local (sans contrainte), alors (a_1,a_2) est un point critique de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) = 0 \quad .$$

Cette condition est une condition nécessaire, elle n'est pas suffisante. Par contre, la proposition donne une condition suffisante non nécessaire.

Proposition 5.1 *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U. Soit $(a_1,a_2) \in U$ un point critique de f tel que :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_1,a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1,a_2) - (\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1,a_2))^2 > 0 \quad (\text{resp.} < 0) \quad ,$$

alors f possède un minimum local (resp. maximum local) en (a_1,a_2).

Exemple : Soit la fonction :

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \text{ , } (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + x_2 + 3 \quad .$$

La fonction f est polynomiale. Elle admet donc des dérivées partielles de tout ordre continues. Les points critiques de fs ont les solutions (x_1,x_2) du système d'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2 + 2 = 0 \text{ ,} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \text{ .} \end{cases}$$

La seule solution de ce système est $(-1,0)$. Ainsi, f admet $(-1,0)$ comme unique point critique. D'autre part, nous avons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(-1,0) = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(-1,0) = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(-1,0) = 1 \quad .$$

Comme :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(-1{,}0)\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(-1{,}0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(-1{,}0)^2 = 3 \neq 0$$
Il résulte donc de la proposition que $f(-1{,}0) = 2$ est un minimum local de la fonction f.

Pour une fonction numérique de n variables, nous avons :

Proposition 5.2 *Soit $f : U \to \mathbf{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ admettant des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur U. Soit $a \in U$ un point critique de f tel que pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul :*

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j > 0 \quad (\text{resp.} < 0) \quad .$$

alors f possède un minimum local (resp. maximum local) en a.