Licence de Sciences Économiques
Mathématiques L1
Année 2004-2005

2 novembre 2004

Table des matières

I Généralités sur les ensembles et les applications

Définition 0.1 *Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de l'ensemble.*

$a \in A$ signifie que a est un élément de A.
$\{a, b, c\}$ désigne l'ensemble formé des éléments a, b et c.
$\emptyset$ désigne l'ensemble sans élément.

Définition 0.2 *Soit A un ensemble. Un sous-ensemble de A est un ensemble fomé d'éléments de A.*

$B \subset A$ signifie que B est un sous-ensemble de A. On dit aussi que B est contenu dans A.

Opérations : Soit B et C deux sous-ensembles de A.

L'intersection de B et C, notée $B \cap C$ est le sous-ensemble de A formé des élements de A qui sont dans B et dans C :

$$B \cap C = \{a \in A \quad ; \quad a \in B \quad \text{et} \quad a \in C\} \ ,$$

lire : "l'ensemble des éléments a de A tels que a appartient à B et a appartient à C".

La réunion de B et C, notée $B \cup C$ est le sous-ensemble de A formé des élements de A qui sont dans B ou dans C :

$$B \cup C = \{a \in A \quad ; \quad a \in B \quad \text{ou} \quad a \in C\} \ ,$$

lire : "l'ensemble des éléments a de A tels que a appartient à B ou a appartient à C".

Le complémentaire de B dans A, noté $A - B$, est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$A - B = \{a \in A \quad ; \quad a \notin B\} \ ,$$

lire : "l'ensemble des éléments a de A tels que a n'appartient pas à B".

Définition (application) 0.3 *Une application $f : A \to B$ est un procédé qui associe à tout élément a de A un unique élément b de B noté $f(a)$ et appelé image de a par f.*

On appelle identité de l'ensemble A et on note Id_A l'application de A vers A définie par $\mathrm{Id}_A(a) = a$:

$$\mathrm{Id}_A : A \to A \quad : \quad a \mapsto (\mathrm{Id}_A)(a) = a\ .$$

Définition (composition des applications) 0.4 *Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle composée de g par f et on note $g \circ f$ l'application de A vers C définie par $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pour tout a dans A :*

$$g \circ f : A \to C \quad : \quad a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a))\ .$$

Définition (application injective, surjective et bijective) 0.5 *Soit $f : A \to B$ une application. Si pour tout élément b de B l'équation :*

$$f(a) = b$$

admet

- *zéro ou une solution, on dit que f est injective,*
- *une ou plus de solutions, on dit que f est surjective,*
- *exactement une solution, on dit que f est bijective.*

Définition 0.6 *Soit $f : A \to B$ une application bijective. On appelle inverse de f, l'application notée $f^{-1} : B \to A$ définie pour tout élément b de B par :*

$f^{-1}(b)$ est l'unique élément a de A solution de $f(a) = b$.

Si $f : A \to B$ est une application bijective, on peut vérifier :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A\ .$$

Définition (fonction) 0.7 *Une fonction $f : A \to B$ est un procédé qui associe à tout élément a de A zéro ou un élément b de B noté alors $f(a)$ et appelé image de a. Le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f. On note cet ensemble $\mathcal{D}_f$.*

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions, $g \circ f$ désignera la fonction de A vers C définie sur l'ensemble des éléments a de $\mathcal{D}_f$ tels que $f(a)$ appartienne à $\mathcal{D}_g$ par $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Ainsi, par définition :

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{a \in \mathcal{D}_f \quad ; \quad f(a) \in \mathcal{D}_g\}\ .$$

II Fonctions numériques

1 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$. Il y a neuf types d'intervalle de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lcllll}
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a < x < b\} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a < x \leq b\} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a \leq x < b\} \\
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a \leq x \leq b\} \\
]-\infty,b[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & x < b\} \\
]-\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} & ; & x \leq b\} \\
]a,\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a < x\} \\
[a,\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a \leq x\} \\
]-\infty,\infty[& = & \mathbb{R} & & &
\end{array}$$

Considérons la fonction valeur absolue :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad : \quad x \mapsto \mid x \mid \quad = \quad \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \mid x+y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid\,, \\ \mid xy \mid = \mid x \mid \mid y \mid\,, \\ \mid x \mid = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Rappelons que pour ϵ réel positif et a réel :

$$\begin{cases} \mid x-a \mid \leq \epsilon & \text{équivaut à} \quad x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\,, \\ & \text{équivaut à} \quad a-\epsilon < x < a+\epsilon\,. \end{cases}$$

Définition (ouvert, fermé, borné) 1.1 *Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est dit ouvert si pour tout $u \in U$, il existe ϵ tel que $]u-\epsilon, u+\epsilon[$ soit contenu dans U (attention que ϵ dépend du u pris dans U).*
Un sous-ensemble $\mathbb{R}$ est dit fermé si son complémenatire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.
Un sous-ensemble H de $\mathbb{R}$ est dit borné s'il existe un réel M tel que pour tout $h \in H$, on ait $\mid h \mid \leq M$.

Remarque 1.2 *Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$. Les intervalles $]a, b[$, $]-\infty, a[$, $]b, \infty[$ sont ouverts. Les intervalles $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $[b, \infty[$ sont fermés.*

Remarque 1.3 *L'intersection et la réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts. De même, l'intersection et la réunion de deux fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés et l'intersection et la réunion de deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ sont bornés.*

2 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$

Revenons aux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite. Fixons un repère de $\mathcal{D}$. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ s'identifie à la droite $\mathcal{D}$ par l'application qui à un réel x associe le point M de $\mathcal{D}$ d'abscisse x.

Soit x, a deux réels ; soit M le point de D d'abscisse x et A celui d'abscisse a. La longueur du segment AM est $\mid x - a \mid$. Soit de plus, r un réel positif. L'ensemble :

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R} \; ; \; \mid x - a \mid < r\} =]a - r, a + r[$$

s'identifie donc à l'ensemble M des points de $\mathcal{D}$ qui sont à une distance de A strictement inférieur à r. Comme $\sqrt{(x-a)^2} = \mid x - a \mid$, nous avons aussi :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \sqrt{(x-a)^2} < r\} \; .$$

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels. Soit $\mathcal{P}$ un plan. Fixons un repère de $\mathcal{P}$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ s'identifie alors au plan $\mathcal{P}$ par l'application qui au couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ associe le point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x_1, x_2) dans le repère de $\mathcal{P}$.

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit M le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $x = (x_1, x_2)$ et A celui de coordonnées $a = (a_1, a_2)$. La longueur du segment AM est :

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \; .$$

Soit de plus, r un réel positif. Notons :

$$B(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r\} \; .$$

Cet ensemble s'identifie à l'ensemble M des points de $\mathcal{P}$ qui sont à une distance de A strictement inférieur à r ; c'est à dire au disque de centre a et de rayon r sans son bord.

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels. Soit $\mathcal{E}$ un espace. Fixons un repère de $\mathcal{E}$. L'ensemble $\mathbb{R}^3$ s'identifie alors au plan $\mathcal{E}$ par l'application qui au couple $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans le repère de $\mathcal{E}$.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit M le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$ et A celui de coordonnées $a = (a_1, a_2, a_3)$. La longueur du segment AM est :

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}$$

Soit de plus, r un réel positif. Notons :

$$B(a, r) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} < r\} \ .$$

Cet ensemble s'identifie à l'ensemble M des points de $\mathcal{E}$ qui sont à une distance de A strictement inférieur à r ; c'est à dire à la boule de centre a et de rayon r sans son bord.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel . Les définitions ci-dessus se généralisent à l'ensemble $\mathbb{R}^n$ formé des n-uplets de nombres réels.

Définition (distance) 2.1 *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle distance de x à a le nombre réel positif :*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} \ .$$

et nous notons pour r réel positif :

$$B(a, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} < r\} \ .$$

Définition (ouvert, fermé, borné) 2.2 *Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est dit ouvert si pour tout $u \in U$, il existe ϵ tel que $B(u, \epsilon)$ soit contenu dans U (attention : ϵ dépend du u pris dans U).*
Un sous-ensemble $\mathbb{R}^n$ est dit fermé si son complémenatire dans $\mathbb{R}^n$ est ouvert.
Un sous-ensemble H de $\mathbb{R}^n$ est dit borné s'il existe un réel M tel que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$, on ait $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} < M$.

Remarque 2.3 *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et r un réel positif. Alors $B(x, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle cet ensemble la boule ouverte de centre x et de rayon r.*

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et r réel positif. Désignons par :

$$\tilde{B}(a, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \max\{\mid x_1 - a_1 \mid, \ldots, \mid x_n - a_n \mid\} < r\} \ .$$

Pour $n = 2$, si A désigne le point de coordonnnées $a = (a_1, a_2)$, $\tilde{B}(a, r)$ s'identifie au carré de centre a dont la longueur des cotés est $2r$.

Nous avons :

$$B(a, r) \subset \tilde{B}(a, r) \subset B(a, \sqrt{n}\, r) \subset \tilde{B}(a, \sqrt{n}\, r) \ .$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de réels est muni d'une addition, d'une soustraction et d'une multiplication par les réels. Soit :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad x = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

– la somme de x et y est le n-uplet noté $x + y$ défini par :

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \ ,$$

– la différence de x par y est le n-uplet noté $x - y$ défini par :

$$x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \ ,$$

– le produit de x par λ est le n-uplet noté λx défini par :

$$\lambda x = (\lambda x_1 + y_1, \ldots, \lambda x_n) \ .$$

On note $0 \in \mathbb{R}^n$ le n-uplet $(0,\ldots,0)$.

On peut vérifier que pour tout x,y,$z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{l}
(x+y)+z = (x+y)+z \ , \\
\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \ , \\
\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \ , \\
(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \ , \\
x - x = 0 \ .
\end{array}$$

Remarque 2.4 *L'intersection et la réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts. De même, l'intersection et la réunion de deux fermés de $\mathbb{R}^n$ sont des fermés et l'intersection et la réunion de deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$ sont bornés.*

3 Fonctions numériques : définitions et exemples

On appelle fonction numérique à n variables une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ d'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ vers l'ensemble des nombres réels.

Exemple : Considérons la fonction :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \ .$$

Son domaine de définition est :

$$\mathcal{D}_g = \{x = (x_1, x_2) \quad ; \quad x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 > 0\} \ .$$

Considérons la fonction :

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \ .$$

Son domaine de définition est :

$$\mathcal{D}_g = \{x = (x_1, x_2) \quad ; \quad x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 \neq 0\}$$

qui s'identifie à la réunion des axes de coordonnées.

Considérons deux fonctions $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$, et un réel λ.

On appelle somme de f et g la fonction notée $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ par :

$$(f + g)(x_1, \ldots, x_n) := (f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

On appelle produit de f par g la fonction notée $fg : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ par :

$$(fg)(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_n)g(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Les fonctions $f + g$ et fg sont définies en tout point où f et g le sont. Les domaines de définitions de $f + g$ et fg sont donc $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ l'intersection du domaine de définition de f et du domaine de définition de g.

On appelle quotient de f par g la fonction notée $\dfrac{f}{g} : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ par :

$$\frac{f}{g}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{g(x_1, \ldots, x_n)} \ .$$

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie en tout point où f et g sont définies et où g ne s'annule pas.

$$\mathcal{D}_{f/g} = \{x \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_f \quad ; \quad g(x) \neq 0\}$$

On appelle produit de f par $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction notée $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ par :

$$(\lambda f)(x_1, \ldots, x_n) = \lambda f(x_1, \ldots, x_n) \ .$$

Le domaine de définition de λf coïncide avec celui de f.

Exemple Soient f,g les fonctions numériques :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 - x_1^2 \ ,$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto 2x_1^2 + x_2^2 \ .$$

La fonction $\frac{f+g}{g}$ est la fonction :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{2x_1^2 + x_2^2} \ .$$

Montrer que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$.

Définition (norme usuelle) 3.1 *Nous appelons norme usuelle de $\mathbb{R}^n$ l'application de $\mathbb{R}^n$ vers l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs définie par :*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \quad : \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \| x \| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \ .$$

Avec cette définition si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et si est un r réel positif.

$$B(a, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ \| x - a \| < r\} \ .$$

En effet, par définition de la soustraction dans $\mathbb{R}^n$:

$$\| x - a \| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$$

qui n'est d'ailleurs rien d'autre que la distance de x à a.

Pour tout x, $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut montrer :

$$\begin{cases} \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| \,, \\ \| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \| \,, \\ \| x \| = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$

Considérons la fonction numérique d'une seule variable :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x^{17} + 5x - 4$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction polynômiale d'une variable de degré 17.

Définition (fonction polynômiale d'une variable) 3.2 *Soit $m+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tels que $a_0 \neq 0$. On appelle fonction polynômiale d'une variable de degré m la fonction :*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_0 \ .$$

Considérons la fonction numérique de deux variables :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = \frac{2}{3} x_1^{12} x_2^5 + 5 x_1^3 x_2^7 - 4 \ .$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$. C'est une fonction polynômiale de deux variables.

Définition (fonction polynômiale de n variables) 3.3 *Soit I un sous-ensemble fini de n-uplets d'entiers naturels. Donnons nous pour chaque élément $(k_1, \ldots, k_n)$ de I un réel noté $a_{k_1,\ldots,k_n}$. La fonction :*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \in I} a_{k_1,\ldots,k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$$

est appelée fonction polynômiale de n variables.

On remarque que la somme et le produit de deux fonctions polynômiales de n variables est une fonction polynômiale de n variables, de même que le produit d'une fonction polynômiale de n variables par un réel.

Définition (fonction rationelle de n variables) 3.4 *On appelle fonction rationelle de n variables le quotient de deux fonctions polynômiales de n variables*

Exemple La fonction :

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \frac{x_1^5 x_2 + x_1 x_2^3}{x_1^3 x_2^6 + x_1 + 2}$$

est une fonction rationelle de deux variables. Elle est définie sur :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_1^3 x_2^6 + x_1 + 2 \neq 0\} \ .$$

Cet ensemble n 'est pas du tout évident à représenter géométriquent.

On remarque que la somme, le produit et le quotient de deux fonctions rationelles de n variables est une fonction rationelle de n variables, de même que le produit d'une fonction rationelle de n variables par un réel.

4 Fonctions numériques : limite et continuité

Définition (point adhérent) 4.1 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Un point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est dit adhérent à A si pour tout réel strictement positif, $B(a, r)$ rencontre A.*

Exemple avec $n = 1$: Le réel u est adhérent à $A =]u, v[\subset \mathbb{R}$. En effet, pour tout réel strictement positif r, $B(u, r) =]u - r,\, u + r[$ rencontre $]u,\, v[$.

Exemple avec $n = 2$: Le point $(2, 0)$ est adhérent au sous-ensemble :

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_2 > 0\} \; .$$

En effet, il est clair que la boule $B((2, 0), r)$ qui est le disque de centre $(2, 0)$ et de rayon r rencontre A pour tout r réel strictement positif. Par contre le point $(2, -1)$ n'est pas adhérent à A.

Remarque 4.2 *Un point de A est toujours adhérent à A.*

Définition (limite) 4.3 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ adhérent à A et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers a, ou encore que f a pour limite l quand x tend vers a si " f est proche de l quand x est proche de a", c'est-à-dire : si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que*

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(a, \eta) \quad \text{et} \quad x \in A \quad \text{implique} \quad | f(x) - l | < \epsilon \; .$$

Si cette limite existe, elle est unique. Nous la notons :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \; .$$

Exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1$. Le point $a = (17, 2)$ est adhérent à $\mathbb{R}^2$, car c'est un point de $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (17, 2)} f(x_1, x_2) = f(17, 2) = 17 \; .$$

En effet, soit $\epsilon > 0$. Rappelons que :

$$B((17, 2), \eta) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; \sqrt{(x_1 - 17)^2 + (x_2 - 2)^2} < \eta\} \; .$$

Nous devons montrer que : tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\sqrt{(x_1 - 17)^2 + (x_2 - 2)^2} < \eta \quad \text{implique} \quad | x_1 - 17 | < \epsilon \ .$$

Il suffit de prendre $\eta = \epsilon$, puisque pour tout (x_1, x_2) :

$$| x_1 - 17 | \leq \sqrt{(x_1 - 17)^2 + (x_2 - 2)^2} \quad .$$

Plus généralement, on montre de même que pour tout $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1, x_2) = f(a_1, a_2) = a_1 \quad .$$

Opérations sur les limites : Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ adhérent à A. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l'$, $\lim_{x\to a} g(x) = l''$. Nous avons :

i) $\lim\limits_{x\to a}(f + g)(x)$ existe et vaut $l' + l''$,

ii) $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x)$ existe et vaut $\lambda l'$,

iii) $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x)$ existe et vaut $\lambda l'$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si de plus, g est non nulle sur A et $l'' \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a}(f/g)(x)$ existe et vaut l'/l''.

Donnons une propriété utile pour calculer des limites.

Proposition 4.4 *Soient $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ adhérent à A. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ tel que si x appartient à $B(a, r)$, on ait :*

$$f(x) \geq g(x) \geq h(x) \ .$$

Supposons alors que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe et vaut l.

Remarque 4.5 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $l = f(a)$.*

Définition (continuité) 4.6 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe. Comme $a \in A$, on a alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue si f est continue en tout point de A.*

Opérations sur les fonctions continues : Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Supposons que f et g sont continues en un point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$. Alors les fonctions $f + g$, fg et λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) sont continues en a. Si de plus g est non nul sur A, la fonction f/g est continue en a. Il en est de même si on remplace continue en a par continue.

Proposition 4.7 *Une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est continue. Une fonction rationelle est continue sur son domaine de définition.*

Idée de la preuve : On montre comme dans l'exemple précédent que les fonctions coordonnées $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ : \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$ sont continues. On en déduit que les fonctions polynomiales sont continues, car elles s'obtiennent comme produit et sommes finies de fonctions coordonnées.

Exemple : La fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

est continue car polynomiale. En particulier,

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(3,2)} f(x_1, x_2) = f(3, 2) = 17 \ .$$

Considérons la fonction rationelle :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \ .$$

Son domaine de définition est :

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 > 0\} \ .$$

Considérons la fonction

$$h : D \to \mathbb{R} \ : \ (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \ .$$

La propostion 4.7 signifie que h est continue. En particulier,

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(3,2)} h(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \ .$$

Proposition 4.8 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $B \subset A$, on appelle restriction de f à B l'application notée $f_{|B}$:*

$$f_{|B} : B \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto f(x) .$$

Alors si f est continue, la restriction de f à B est continue.

Exemple : Considérons la fonction f :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_2 .$$

Cette fonction est continue car polynomiale. La restriction de cette fonction à $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$:

$$\mathcal{C} \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f_{|\mathcal{C}}(x_1, x_2) = x_2$$

est donc continue.

Composition de limites et de fonctions continues :
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $g : B \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble B de $\mathbb{R}$. Pour composer g par f, il faut et il suffit que pour $x \in A$, $f(x) \in B$. On peut alors définir :

$$g \circ f : A \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto g(f(x)) .$$

i) Supposons que $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A et que $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Alors, b est adhérent à B. Supposons aussi que $\lim_{y \to b} g(y) = l$. Alors :

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) \quad \text{existe et vaut} \quad l .$$

ii) Si f est continue en $a \in A$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

iii) Si f et g sont continues, $g \circ f$ est continue.

Exemple : Considérons la fonction f :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2} .$$

Cette fonction s'obtient par composée de la fonction polynomiale :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto) = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

et de la fonction racine :

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto= \sqrt{x}\ .$$

La première fonction est continue car polynomiale. En revenant à la définition des limites, on peut montrer que la fonction racine est continue (nous l'admettrons).

Généralisons quelque peu ce principe de composition. Considérons p fonctions $f_1, \ldots, f_p : A \to \mathbb{R}$ définies sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions permettent de définir une application :

$$f : A \to \mathbb{R}^p \ : \ x \mapsto (f_1(x), \ldots f_p(x))\ .$$

Soit $g : B \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $B \subset \mathbb{R}^p$. Pour composer g par f, il suffit que pour $x \in A : f(x) \in B$. La fonction $g \circ f$ est alors définie :

$$g \circ f : A \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto g(f_1(x), \ldots, f_p(x))\ .$$

i) Supposons que $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A et que pour tout entier $1 \leq j \leq p$, on ait : $\lim\limits_{x \to a} f_j(x) = b_j$. Alors, $b = (b_1, \ldots, b_p)$ est adhérent à B. Supposons aussi que $\lim_{y \to b} g(y) = l$. Alors, $\lim\limits_{x \to a}(g \circ f)(x)$ existe et vaut l.

i)) Si f est continue en $a \in A$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ esr continue en a.

i))) Si f et g sont continues, $g \circ f$ est continue.