Licence de Sciences Économiques
Mathématiques L1
Année 2004-2005

12 novembre 2004

Table des matières

I Généralités sur les ensembles et les applications

Définition 0.1 *Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de l'ensemble.*

$a \in A$ signifie que a est un élément de A.
$\{a, b, c\}$ désigne l'ensemble formé des éléments a, b et c.
$\emptyset$ désigne l'ensemble sans élément.

Définition 0.2 *Soit A un ensemble. Un sous-ensemble de A est un ensemble fomé d'éléments de A.*

$B \subset A$ signifie que B est un sous-ensemble de A. On dit aussi que B est contenu dans A.

Opérations : Soit B et C deux sous-ensembles de A.

L'intersection de B et C, notée $B \cap C$ est le sous-ensemble de A formé des élements de A qui sont dans B et dans C :

$$B \cap C = \{a \in A \quad ; \quad a \in B \quad \text{et} \quad a \in C\} ,$$

lire : "l'ensemble des éléments a de A tels que a appartient à B et a appartient à C".

La réunion de B et C, notée $B \cup C$ est le sous-ensemble de A formé des élements de A qui sont dans B ou dans C :

$$B \cup C = \{a \in A \quad ; \quad a \in B \quad \text{ou} \quad a \in C\} ,$$

lire : "l'ensemble des éléments a de A tels que a appartient à B ou a appartient à C".

Le complémentaire de B dans A, noté $A - B$, est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B :

$$A - B = \{a \in A \quad ; \quad a \notin B\} ,$$

lire : "l'ensemble des éléments a de A tels que a n'appartient pas à B".

Définition (application) 0.3 *Une application $f : A \to B$ est un procédé qui associe à tout élément a de A un unique élément b de B noté $f(a)$ et appelé image de a par f.*

On appelle identité de l'ensemble A et on note Id_A l'application de A vers A définie par $\mathrm{Id}_A(a) = a$:

$$\mathrm{Id}_A : A \to A \quad : \quad a \mapsto (\mathrm{Id}_A)(a) = a\ .$$

Définition (composition des applications) 0.4 *Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On appelle composée de g par f et on note $g \circ f$ l'application de A vers C définie par $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ pour tout a dans A :*

$$g \circ f : A \to C \quad : \quad a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a))\ .$$

Définition (application injective, surjective et bijective) 0.5 *Soit $f : A \to B$ une application. Si pour tout élément b de B l'équation :*

$$f(a) = b$$

admet
- *zéro ou une solution, on dit que f est injective,*
- *une ou plus de solutions, on dit que f est surjective,*
- *exactement une solution, on dit que f est bijective.*

Définition 0.6 *Soit $f : A \to B$ une application bijective. On appelle inverse de f, l'application notée $f^{-1} : B \to A$ définie pour tout élément b de B par :*

$$f^{-1}(b) \text{ est l'unique élément } a \text{ de } A \text{ solution de } f(a) = b.$$

Si $f : A \to B$ est une application bijective, on peut vérifier :

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A\ .$$

Définition (fonction) 0.7 *Une fonction $f : A \to B$ est un procédé qui associe à tout élément a de A zéro ou un élément b de B noté alors $f(a)$ et appelé image de a. Le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f. On note cet ensemble $\mathcal{D}_f$.*

Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux fonctions, $g \circ f$ désignera la fonction de A vers C définie sur l'ensemble des éléments a de $\mathcal{D}_f$ tels que $f(a)$ appartienne à $\mathcal{D}_g$ par $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Ainsi, par définition :

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{a \in \mathcal{D}_f \quad ; \quad f(a) \in \mathcal{D}_g\}\ .$$

II Fonctions numériques

1 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$. Il y a neuf types d'intervalle de $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{lllll}
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a < x < b\} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a < x \leq b\} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a \leq x < b\} \\
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a \leq x \leq b\} \\
]-\infty,b[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & x < b\} \\
]-\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} & ; & x \leq b\} \\
]a,\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a < x\} \\
[a,\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} & ; & a \leq x\} \\
]-\infty,\infty[& = & \mathbb{R} & &
\end{array}$$

Considérons la fonction valeur absolue :

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad : \quad x \mapsto \mid x \mid \quad = \quad \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \mid x+y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid\,, \\ \mid xy \mid = \mid x \mid\mid y \mid\,, \\ \mid x \mid = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0\,. \end{cases}$$

Rappelons que pour ϵ réel positif et a réel :

$$\begin{cases} \mid x-a \mid \leq \epsilon & \text{équivaut à} \quad x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[\,, \\ & \text{équivaut à} \quad a-\epsilon < x < a+\epsilon\,. \end{cases}$$

Définition (ouvert, fermé, borné) 1.1 *Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est dit ouvert si pour tout $u \in U$, il existe ϵ tel que $]u-\epsilon, u+\epsilon[$ soit contenu dans U (attention que ϵ dépend du u pris dans U).*
Un sous-ensemble $\mathbb{R}$ est dit fermé si son complémenatire dans $\mathbb{R}$ est ouvert.
Un sous-ensemble H de $\mathbb{R}$ est dit borné s'il existe un réel M tel que pour tout $h \in H$, on ait $\mid h \mid \leq M$.

Remarque 1.2 *Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$. Les intervalles $]a, b[$, $]-\infty, a[$, $]b, \infty[$ sont ouverts. Les intervalles $[a, b]$, $]-\infty, a]$, $[b, \infty[$ sont fermés.*

Remarque 1.3 *L'intersection et la réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts. De même, l'intersection et la réunion de deux fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés et l'intersection et la réunion de deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ sont bornés.*

2 Ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$

Revenons aux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}$ une droite. Fixons un repère de $\mathcal{D}$. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ s'identifie à la droite $\mathcal{D}$ par l'application qui à un réel x associe le point M de $\mathcal{D}$ d'abscisse x.

Soit x, a deux réels ; soit M le point de D d'abscisse x et A celui d'abscisse a. La longueur du segment AM est $\mid x - a \mid$. Soit de plus, r un réel positif. L'ensemble :

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R} \; ; \; \mid x - a \mid < r\} =]a - r, a + r[$$

s'identifie donc à l'ensemble M des points de $\mathcal{D}$ qui sont à une distance de A strictement inférieur à r. Comme $\sqrt{(x-a)^2} = \mid x - a \mid$, nous avons aussi :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} \quad ; \quad \sqrt{(x-a)^2} < r\} \; .$$

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels. Soit $\mathcal{P}$ un plan. Fixons un repère de $\mathcal{P}$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ s'identifie alors au plan $\mathcal{P}$ par l'application qui au couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ associe le point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x_1, x_2) dans le repère de $\mathcal{P}$.

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit M le point de $\mathcal{P}$ de coordonnées $x = (x_1, x_2)$ et A celui de coordonnées $a = (a_1, a_2)$. La longueur du segment AM est :

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \; .$$

Soit de plus, r un réel positif. Notons :

$$B(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r\} \; .$$

Cet ensemble s'identifie à l'ensemble M des points de $\mathcal{P}$ qui sont à une distance de A strictement inférieur à r ; c'est à dire au disque de centre a et de rayon r sans son bord.

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels. Soit $\mathcal{E}$ un espace. Fixons un repère de $\mathcal{E}$. L'ensemble $\mathbb{R}^3$ s'identifie alors au plan $\mathcal{E}$ par l'application qui au couple $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ associe le point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans le repère de $\mathcal{E}$.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit M le point de $\mathcal{E}$ de coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$ et A celui de coordonnées $a = (a_1, a_2, a_3)$. La longueur du segment AM est :

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}$$

Soit de plus, r un réel positif. Notons :

$$B(a, r) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} < r\} .$$

Cet ensemble s'identifie à l'ensemble M des points de $\mathcal{E}$ qui sont à une distance de A strictement inférieur à r ; c'est à dire à la boule de centre a et de rayon r sans son bord.

Soit $n \geq 1$ un entier naturel . Les définitions ci-dessus se généralisent à l'ensemble $\mathbb{R}^n$ formé des n-uplets de nombres réels.

Définition (distance) 2.1 *Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On appelle distance de x à a le nombre réel positif :*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} .$$

et nous notons pour r réel positif :

$$B(a, r) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} < r\} .$$

Définition (ouvert, fermé, borné) 2.2 *Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est dit ouvert si pour tout $u \in U$, il existe ϵ tel que $B(u, \epsilon)$ soit contenu dans U (attention : ϵ dépend du u pris dans U).*
Un sous-ensemble $\mathbb{R}^n$ est dit fermé si son complémenatire dans $\mathbb{R}^n$ est ouvert.
Un sous-ensemble H de $\mathbb{R}^n$ est dit borné s'il existe un réel M tel que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$, on ait $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} < M$.

Remarque 2.3 *Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et r un réel positif. Alors $B(x, r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle cet ensemble la boule ouverte de centre x et de rayon r.*

Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et r réel positif. Désignons par :

$$\tilde{B}(a, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; \max\{| \, x_1 - a_1 \, |, \ldots, | \, x_n - a_n \, |\} < r\} \; .$$

Pour $n = 2$, si A désigne le point de coordonnnées $a = (a_1, a_2)$, $\tilde{B}(a, r)$ s'identifie au carré de centre a dont la longueur des cotés est $2r$.

Nous avons :

$$B(a, r) \subset \tilde{B}(a, r) \subset B(a, \sqrt{n}\, r) \subset \tilde{B}(a, \sqrt{n}\, r) \; .$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de réels est muni d'une addition, d'une soustraction et d'une multiplication par les réels. Soit :

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad , \quad x = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

– la somme de x et y est le n-uplet noté $x + y$ défini par :

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \; ,$$

– la différence de x par y est le n-uplet noté $x - y$ défini par :

$$x - y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \; ,$$

– le produit de x par λ est le n-uplet noté λx défini par :

$$\lambda x = (\lambda x_1 + y_1, \ldots, \lambda x_n) \; .$$

On note $0 \in \mathbb{R}^n$ le n-uplet $(0, \ldots, 0)$.

On peut vérifier que pour tout x,y,$z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
&(x + y) + z = (x + y) + z \ , \\
&\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \ , \\
&\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \ , \\
&(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \ , \\
&x - x = 0 \ .
\end{aligned}$$

Remarque 2.4 *L'intersection et la réunion de deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts. De même, l'intersection et la réunion de deux fermés de $\mathbb{R}^n$ sont des fermés et l'intersection et la réunion de deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$ sont bornés.*

3 Fonctions numériques : définitions et exemples

On appelle fonction numérique à n variables une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ d'un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$ vers l'ensemble des nombres réels.

Exemple : Considérons la fonction :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \ .$$

Son domaine de définition est :

$$\mathcal{D}_g = \{x = (x_1, x_2) \quad ; \quad x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 > 0\} \ .$$

Considérons la fonction :

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \ .$$

Son domaine de définition est :

$$\mathcal{D}_g = \{x = (x_1, x_2) \quad ; \quad x_1 \neq 0 \text{ ou } x_2 \neq 0\}$$

qui s'identifie à la réunion des axes de coordonnées.

Considérons deux fonctions $f : U \to \mathbb{R}$, $g : U \to \mathbb{R}$, et un réel λ.

On appelle somme de f et g la fonction notée $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ par :

$$(f + g)(x_1, \dots, x_n) := (f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n) \ .$$

On appelle produit de f par g la fonction notée $fg : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ par :

$$(fg)(x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_n) \ .$$

Les fonctions $f + g$ et fg sont définies en tout point où f et g le sont. Les domaines de définitions de $f + g$ et fg sont donc $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ l'intersection du domaine de définition de f et du domaine de définition de g.

On appelle quotient de f par g la fonction notée $\dfrac{f}{g} : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ par :

$$\frac{f}{g}(x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{g(x_1, \dots, x_n)} \ .$$

La fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie en tout point où f et g sont définies et où g ne s'annule pas.

$$\mathcal{D}_{f/g} = \{x \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{D}_f \quad ; \quad g(x) \neq 0\}$$

On appelle produit de f par $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction notée $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ par :

$$(\lambda f)(x_1, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n) \ .$$

Le domaine de définition de λf coïncide avec celui de f.

Exemple Soient f,g les fonctions numériques :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 - x_1^2 \ ,$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto 2x_1^2 + x_2^2 \ .$$

La fonction $\dfrac{f+g}{g}$ est la fonction :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2}{2x_1^2 + x_2^2} \ .$$

Montrer que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$.

Définition (norme usuelle) 3.1 *Nous appelons norme usuelle de $\mathbb{R}^n$ l'application de $\mathbb{R}^n$ vers l'ensemble $\mathbb{R}^+$ des réels positifs définie par :*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \quad : \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto || \, x \, || = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \ .$$

Avec cette définition si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et si est un r réel positif.

$$B(a, r) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ || \, x - a \, || < r\} \ .$$

En effet, par définition de la soustraction dans $\mathbb{R}^n$:

$$|| \, x - a \, || = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2}$$

qui n'est d'ailleurs rien d'autre que la distance de x à a.

Pour tout x, $y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut montrer :

$$\begin{cases} || \, x + y \, || \leq || \, x \, || + || \, y \, || \, , \\ || \, \lambda x \, || = | \, \lambda \, | \, || \, x \, || \, , \\ || \, x \, || = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$

Considérons la fonction numérique d'une seule variable :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto f(x) = \frac{1}{2} x^{17} + 5x - 4$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction polynômiale d'une variable de degré 17.

Définition (fonction polynômiale d'une variable) 3.2 *Soit $m+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tels que $a_0 \neq 0$. On appelle fonction polynômiale d'une variable de degré m la fonction :*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_0 \ .$$

Considérons la fonction numérique de deux variables :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = \frac{2}{3} x_1^{12} x_2^5 + 5 x_1^3 x_2^7 - 4 \; .$$

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$. C'est une fonction polynômiale de deux variables.

Définition (fonction polynômiale de n variables) 3.3 *Soit I un sous-ensemble fini de n-uplets d'entiers naturels. Donnons nous pour chaque élément $(k_1, \dots, k_n)$ de I un réel noté $a_{k_1,\dots,k_n}$. La fonction :*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x) = \sum_{k_1,\dots,k_n \in I} a_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

est appelée fonction polynômiale de n variables.

On remarque que la somme et le produit de deux fonctions polynômiales de n variables est une fonction polynômiale de n variables, de même que le produit d'une fonction polynômiale de n variables par un réel.

Définition (fonction rationelle de n variables) 3.4 *On appelle fonction rationelle de n variables le quotient de deux fonctions polynômiales de n variables*

Exemple La fonction :

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad x = (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \frac{x_1^5 x_2 + x_1 x_2^3}{x_1^3 x_2^6 + x_1 + 2}$$

est une fonction rationelle de deux variables. Elle est définie sur :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_1^3 x_2^6 + x_1 + 2 \neq 0\} \; .$$

Cet ensemble n 'est pas du tout évident à représenter géométriquent.

On remarque que la somme, le produit et le quotient de deux fonctions rationelles de n variables est une fonction rationelle de n variables, de même que le produit d'une fonction rationelle de n variables par un réel.

4 Fonctions numériques : limite et continuité

Définition (point adhérent) 4.1 *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Un point $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ est dit adhérent à A si pour tout réel strictement positif, $B(a, r)$ rencontre A.*

Exemple avec $n = 1$: Le réel u est adhérent à $A =]u, v[\subset \mathbb{R}$. En effet, pour tout réel strictement positif r, $B(u, r) =]u - r, u + r[$ rencontre $]u, v[$.

Exemple avec $n = 2$: Le point $(2, 0)$ est adhérent au sous-ensemble :

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad x_2 > 0\} \ .$$

En effet, il est clair que la boule $B((2, 0), r)$ qui est le disque de centre $(2, 0)$ et de rayon r rencontre A pour tout r réel strictement positif. Par contre le point $(2, -1)$ n'est pas adhérent à A.

Remarque 4.2 *Un point de A est toujours adhérent à A.*

Définition (limite) 4.3 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ adhérent à A et $l \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers a, ou encore que f a pour limite l quand x tend vers a si " f est proche de l quand x est proche de a", c'est-à-dire : si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que*

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(a, \eta) \quad \text{et} \quad x \in A \quad \text{implique} \quad | f(x) - l | < \epsilon \ .$$

Si cette limite existe, elle est unique. Nous la notons :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ .$$

Exemple $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1$. Le point $a = (17, 2)$ est adhérent à $\mathbb{R}^2$, car c'est un point de $\mathbb{R}^2$. Nous avons :

$$\lim_{(x_1, x_2) \to (17, 2)} f(x_1, x_2) = f(17, 2) = 17 \ .$$

En effet, soit $\epsilon > 0$. Rappelons que :

$$B((17, 2), \eta) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \sqrt{(x_1 - 17)^2 + (x_2 - 2)^2} < \eta\} \ .$$

Nous devons montrer que : tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\sqrt{(x_1-17)^2+(x_2-2)^2} < \eta \quad \text{implique} \quad | x_1 - 17 | < \epsilon \ .$$

Il suffit de prendre $\eta = \epsilon$, puisque pour tout (x_1, x_2) :

$$| x_1 - 17 | \leq \sqrt{(x_1-17)^2+(x_2-2)^2} \quad .$$

Plus généralement, on montre de même que pour tout $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} f(x_1,x_2) = f(a_1,a_2) = a_1 \quad .$$

Opérations sur les limites : Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ adhérent à A. On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l'$, $\lim_{x\to a} g(x) = l''$. Nous avons :

i) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ existe et vaut $l' + l''$,

ii) $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x)$ existe et vaut $\lambda l'$,

iii) $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x)$ existe et vaut $\lambda l'$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si de plus, g est non nulle sur A et $l'' \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a}(f/g)(x)$ existe et vaut l'/l''.

Donnons une propriété utile pour calculer des limites.

Proposition 4.4 *Soient $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ trois fonctions définies sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ adhérent à A. Supposons qu'il existe un réel $r > 0$ tel que si x appartient à $B(a, r)$, on ait :*

$$f(x) \geq g(x) \geq h(x) \ .$$

Supposons alors que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe et vaut l.

Remarque 4.5 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Si $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, alors $l = f(a)$.*

Définition (continuité) 4.6 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe. Comme $a \in A$, on a alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. On dit que f est continue si f est continue en tout point de A.*

Opérations sur les fonctions continues : Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Supposons que f et g sont continues en un point $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$. Alors les fonctions $f + g$, fg et λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) sont continues en a. Si de plus g est non nul sur A, la fonction f/g est continue en a. Il en est de même si on remplace continue en a par continue.

Proposition 4.7 *Une fonction polynomiale de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est continue. Une fonction rationelle est continue sur son domaine de définition.*

Idée de la preuve : On montre comme dans l'exemple précédent que les fonctions coordonnées $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \; : \; (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$ sont continues. On en déduit que les fonctions polynomiales sont continues, car elles s'obtiennent comme produit et sommes finies de fonctions coordonnées.

Exemple : La fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

est continue car polynomiale. En particulier,

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(3,2)} f(x_1, x_2) = f(3, 2) = 17 \; .$$

Considérons la fonction rationelle :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto g(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \; .$$

Son domaine de définition est :

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 > 0\} \; .$$

Considérons la fonction

$$h : D \to \mathbb{R} \; : \; (x_1, x_2) \mapsto h(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \; .$$

La propostion 4.7 signifie que h est continue. En particulier,

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(3,2)} h(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \; .$$

Proposition 4.8 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $B \subset A$, on appelle restriction de f à B l'application notée $f_{|B}$:*

$$f_{|B} : B \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto f(x) \ .$$

Alors si f est continue, la restriction de f à B est continue.

Exemple : Considérons la fonction f :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_2 \ .$$

Cette fonction est continue car polynomiale. La restriction de cette fonction à $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$:

$$\mathcal{C} \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f_{|\mathcal{C}}(x_1, x_2) = x_2$$

est donc continue.

Composition de limites et de fonctions continues :
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Soit $g : B \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble B de $\mathbb{R}$. Pour composer g par f, il faut et il suffit que pour $x \in A$, $f(x) \in B$. On peut alors définir :

$$g \circ f : A \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto g(f(x)) \ .$$

i) Supposons que $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A et que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Alors, b est adhérent à B. Supposons aussi que $\lim\limits_{y \to b} g(y) = l$. Alors :

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) \quad \text{existe et vaut} \quad l \ .$$

ii) Si f est continue en $a \in A$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

iii) Si f et g sont continues, $g \circ f$ est continue.

Exemple : Considérons la fonction f :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2} \ .$$

Cette fonction s'obtient par composée de la fonction polynomiale :

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto) = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

et de la fonction racine :

$$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto= \sqrt{x}\ .$$

La première fonction est continue car polynomiale. En revenant à la définition des limites, on peut montrer que la fonction racine est continue (nous l'admettrons).

Généralisons quelque peu ce principe de composition. Considérons p fonctions $f_1, \ldots, f_p : A \to \mathbb{R}$ définies sur un ensemble A de $\mathbb{R}^n$. Ces fonctions permettent de définir une application :

$$f : A \to \mathbb{R}^p\ :\ x \mapsto (f_1(x), \ldots f_p(x))\ .$$

Soit $g : B \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ensemble $B \subset \mathbb{R}^p$. Pour composer g par f, il suffit que pour $x \in A : f(x) \in B$. La fonction $g \circ f$ est alors définie :

$$g \circ f : A \to \mathbb{R}\ :\ x \mapsto g(f_1(x), \ldots, f_p(x))\ .$$

i) Supposons que $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à A et que pour tout entier $1 \leq j \leq p$, on ait : $\lim\limits_{x \to a} f_j(x) = b_j$. Alors, $b = (b_1, \ldots, b_p)$ est adhérent à B. Supposons aussi que $\lim_{y \to b} g(y) = l$. Alors, $\lim\limits_{x \to a}(g \circ f)(x)$ existe et vaut l.

i)) Si f est continue en $a \in A$ et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ esr continue en a.

i))) Si f et g sont continues, $g \circ f$ est continue.

5 Trois résultats sur les fonctions continues

Proposition 5.1 *Soit f une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}^n$.*

1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ f(x) \in U\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, alors $\{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ f(x) \in F\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Signalons que ce résultat est vrai sous la forme plus générale suivante que nous ne devrions pas utiliser :

Proposition 5.2 *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ et continue.*

1. *Soit U est ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\{x \in A \; ; \; f(x) \in U\}$ est l'intersection de A avec un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, alors $\{x \in A \; ; \; f(x) \in F\}$ est l'intersection de A avec un fermé de $\mathbb{R}^n$.*

Exemple : Considérons la fonction polynomiale :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \mapsto 2x_1^2 + x_2^2 \; .$$

L'ensemble $F = \{1\}$ réduit à un élément est un fermé de $\mathbb{R}$, car son complémentaire $\mathbb{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. D'une part, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x_1, x_2) \in F\} & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x_1, x_2) \in \{1\}\} \; , \\ & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x_1^2 + x_2^2 = 1\} \; . \end{array}$$

D'autre part, f est une fonction polynomiale, donc définie sur $\mathbb{R}^2$ et continue. Il résulte donc la proposition 5.1, que l'ensemble :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Considérons la même fonction f et le sous-ensemble $U =]-\infty, 1[$. Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x_1, x_2) \in U\} & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; f(x_1, x_2) \in]-\infty, 1[\} \; , \\ & = & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x_1^2 + x_2^2 < 1\} \; . \end{array}$$

Comme U est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}$, l'ensemble :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 2x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

est d'après la proposition 5.1 un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 5.3 *Soit A un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f possède un maximum et un minimum qui sont atteints :*

i) il existe M un réel tel que pour tout x dans A, nous ayons $f(x) \leq M$ et de plus, il existe n-uplet a dans A tel que $f(a) = M$;

ii) il existe m un réel tel que pour tout x dans A, nous ayons $m \leq f(x)$ et de plus, il existe n-uplet b dans A tel que $f(b) = m$.

Exemple : Considérons l'ensemble :

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x_1^2 + x_2^2 = 1\right\} .$$

Nous avons montré que c'est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_1, x_2) \in A$. Nous avons :

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 2x_1^2 + x_2^2 = 1 .$$

Ainsi, $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ et (x_1, x_2) appartient à la boule de centre l'origine et de rayon 1. L'ensemble A, contenu dans la boule de centre l'origine et de rayon 1, est donc borné. Considérons alors l'application :

$$h : A \to \mathbb{R} \quad : \quad (x_1, x_2) \to x_1$$

Cette application h est continue, car c'est la restriction à A d'une application polynomiale et donc continue. Comme A est un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^2$, le théorème 5.3 nous assure que f possède un maximum et un minimum qui sont tous les deux atteints.
Nous allons au moyen d'un calcul direct déterminer ces données. Pour ce faire, commencons par remarquer que si $(x_1, x_2) \in A$, $2x_1^2 + x_2^2 = 1$ et donc $2x_1^2 \leq 1$. De la croissance de fonction $x \mapsto x^2$ sur les réels positifs, il en résulte que $\mid x_1 \mid \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi pour tout $(x_1, x_2) \in A$, nous avons :

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq h(x_1, x_2) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Mais nous avons :

$$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in A \quad \text{et} \quad h(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in A \quad \text{et} \quad h(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est un maximum de h atteint en $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ est un minimum de h atteint en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$.

Théorème (des valeurs intermédiaires) 5.4 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $a < b$ deux réels avec $[a, b] \in I$. Alors f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$: pour tout γ entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Exemple : Considérons la fonction :

$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad : \quad x \mapsto \frac{2 - x^3}{x + 1} \ .$$

La fonction f est une fraction rationelle. Elle est donc continue sur son domaine de définition $\mathbb{R} - \{-1\}$. L'intervalle $[0, 1]$ est contenu dans $\mathbb{R} - \{-1\}$. Comme $f(0) = 2$ et $f(1) = \frac{1}{2}$, il résulte du théorème 5.4 que f prend au moins toutes les valeurs comprises entre $\frac{1}{2}$ et 2.

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction numérique d'une variable. Rappelons que l'on dit que g est strictement croissante sur J si :

$$\forall x, y \in J \quad , \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \ .$$

De même, g est dite strictement décroissante si :

$$\forall x, y \in J \quad , \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y) \ .$$

La fonction g est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Corollaire 5.5 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit $a < b$ deux réels avec $[a, b] \in I$. Supposons de plus que f est strictement monotone sur $[a, b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel c dans l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = k$.*

III Dérivées partielles d'une fonction numérique

1 Dérivée d'une fonction numérique d'une variable

2 Dérivées partielles

IV Fonctions usuelles

1 Fonctions exponentielle et logarithme

Proposition (existence de la fonction exponentielle) 1.1 *Il existe une unique fonction dérivable* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *telle que :*

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad , \quad f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \ .$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée :

$$\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad : \quad x \mapsto \exp(x) = e^x \ .$$

Une propriété essentielle de la fonction exponentielle est :

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \quad , \quad e^{x+y} = e^x e^y \ .$$

Il en résulte que la fonction exponentielle est à valeurs strictement positives et est strictement croissante :

$$\forall x, y \in \mathbf{R} \quad , \quad x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < e^x < e^y \ .$$

La fonction exponentielle dérivable sur $\mathbf{R}$ est donc continue sur $\mathbf{R}$. On peut alors montrer que l'application :

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad : \quad x \mapsto e^x$$

est bijective. C'est à dire que pour tout réel $y > 0$, il existe un unique réel x tel que $e^x = y$.

Le réel e^1, valeur de la fonction exponentielle en 1, est noté e. Ce n'est pas un nombre rationnel. Le début de son développement décimal est de 2,71828182846.... .

Proposition (existence de la fonction logarithme) 1.2 *Il existe une unique fonction dérivable* $f : \mathbf{R}^+ - \{0\} \to \mathbf{R}$ *telle que :*

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad f(1) = 0 \; .$$

Cette fonction est appelée fonction logarithme néperien ou logarithme et notée :

$$\ln : \mathbf{R}^+ - \{0\} \to \mathbf{R} \quad : \quad x \mapsto \ln x \; .$$

Une propriété essentielle de la fonction logarithme est :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad , \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \; .$$

La fonction logarithme est strictement croissante :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad x < y \quad \Rightarrow \quad \ln x < \ln y \; .$$

La fonction logarithme dérivable sur $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ est donc continue. On peut alors montrer que l'application :

$$\mathbf{R}^+ - \{0\} \to \mathbf{R} \quad : \quad x \mapsto \ln x$$

est bijective. C'est à dire que pour tout réel y, il existe un unique réel $x > 0$ tel que $\ln x = y$.

Les fonctions logarithme et exponentielle sont liées. En effet, les deux applications bijectives :

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad : \quad x \mapsto e^x$$

et

$$\mathbf{R}^+ - \{0\} \to \mathbf{R} \quad : \quad x \mapsto \ln x$$

sont inverses l'une de l'autre. C'est à dire :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad : \quad \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad : \quad e^{\ln x} = x \; .$$

Pour tout réel a, à l'aide de la fonction logarithme, nous pouvons définir la fonction puissance a.

Définition (fonction puissance) 1.3 *Soit a un nombre réel. Nous appelons fonction puissance a la fonction :*

$$\mathbf{R}^+ - \{0\} \to \mathbf{R} \quad : \quad x \mapsto x^a := e^{a \ln x} \ .$$

Si a rationnel, cette fonction $x \mapsto x^a$ généralise bien la fonction puissance usuelle. Par exemple pour tout $x > 0$, $x.x = x^2 = e^{2 \ln x}$ et $\sqrt{x}$ l'unique réel positif dont le carré est x est bien égal à $x^{1/2} = e^{\frac{1}{2} \ln x}$.

La fonction puissance a :

$$\mathbf{R}^+ - \{0\} \to \mathbf{R} \quad : \quad x \mapsto x^a \ .$$

est dérivable sur $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ comme composée d'applications dérivables. Nous obtenons que sa dérivée est la fonction :

$$\mathbf{R}^+ - \{0\} \to \mathbf{R} \quad : \quad x \mapsto a x^{a-1} \ .$$

On pourra écrire : $(x^a)' = a x^{a-1}$.

Pour tout a réel, nous avons :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad , \quad (xy)^a = x^a y^a \ .$$

La fonction puissance a est à valeurs strictement positives et est strictement croissante. L'application :

$$\mathbf{R}^+ - \{0\} \to \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad : \quad x \mapsto x^a \ .$$

est bijective. Son inverse est l'application :

$$\mathbf{R}^+ - \{0\} \to \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad : \quad x \mapsto x^{\frac{1}{a}} \ .$$

Signalons enfin que pour tout a, b réels nous avons :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad , \quad (x^a)^b = x^{ab} \quad \text{et} \quad x^a \, x^b = x^{a+b}$$

En particulier :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad , \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

2 Fonctions trigonométriques

Considérons dans $\mathbf{R}^2$ le cercle S de centre 0 et de rayon 1 :

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \quad ; \quad x_1^2 + x_2^2 = 1\} .$$

La longueur de S est le nombre 2π. Le nombre π n'est pas rationnel. Le début de son dévelopement décimal est $3,1415926535...$ (que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages ...)

Soit $x \geq 0$ un réel. Parcourons la distance x sur le cercle S à partir du point $A = (1, 0)$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On arrive à un point $M(x) \in S$. Soit $x \leq 0$ un réel. Parcourons la distance x sur le cercle S à partir du point $A = (1, 0)$ dans le sens des aiguilles d'une montre. Pour tout x réel, nous venons de définir un point $M(x)$ dont nous notons $M(x) = (\cos x, \sin x)$ les coordonnées. Nous appelons cosinus la fonction :

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto \cos x$$

et sinus la fonction :

$$\mathbf{R} \to \mathbf{R} \ : \ x \mapsto \sin x$$

Pour tout x réel, nous avons par définition : $(\cos x, \sin x) \in S$ et donc :

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \quad , \quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \sin x \leq 1 .$$

Proposition 2.1 *Les fonctions cosinus et sinus sont continues, dérivables. La dérivée de la fonction cosinus est la fonction* $-\sin$ *et celle de la fonction sinus est la fonction* $\cos$*.*

Nous avons pour tout réel x et pour tout entier k :

$$\begin{array}{lll}
\cos(x + 2k\pi) = \cos x & , & \sin(x + 2k\pi) = \sin x \\
\cos(x + \pi) = -\cos x & , & \sin(x + \pi) = -\sin x \\
\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x & , & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x \\
\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x & , & \sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos x
\end{array}$$

Indiquons quelques valeurs particulières.

$$
\begin{array}{ll}
\cos 0 = 1 \quad , & \sin 0 = 0 \\
\cos \dfrac{\pi}{2} = 0 \quad , & \sin \dfrac{\pi}{2} = 0 \\
\cos \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \quad , & \sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\
\cos \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1\sqrt{2}}{2} \quad , & \sin \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad , & \sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}
\end{array}
$$