Cohomologie des groupes

16 octobre 2005

§1. Cohomologie des groupes discrets

Dans ce qui suit, G est un groupe (discret), k est un anneau, A un groupe abélien.

Définition 1.1 – Soit $\mathfrak{Mod}_{k[G]}$ la catégorie des modules sur $k[G]$, et soit $\mathfrak{Ab}$ la catégorie des groupes abéliens. Soit R^nT le n-ième foncteur dérivé à droite de $T : \mathfrak{Mod}_{k[G]} \to \mathfrak{Ab}$ défini par $T(M) = M^G$. Si $M \in \mathfrak{Mod}_{k[G]}$, le groupe $R^nT(M)$ est appelé n-ième *groupe de cohomologie de* G à coefficients dans M. On le note $H^n(G, M)$.

En d'autres termes, puisque $M^G = Hom_{k[G]}(k, M)$, où l'on munit k de l'action triviale de G, on a

$$H^*(G, M) = Ext^*_{k[G]}(k, M).$$

On définit de manière similaire les groupes d'homologie[1] de G par $H_*(G, M) = Tor_*^{k[G]}(k, M)$.

Pour calculer la cohomologie d'un groupe, on peut donc choisir de construire une résolution projective de k, c'est-à-dire un complexe augmenté $C_* \to k$ de $k[G]$-modules projectifs tel que $H_i(C_*) = 0$ pour $i > 0$ et $H_0(C_*) = k$. On obtient ensuite $H^n(G, M)$ comme le n-ième groupe d'homologie du complexe $Hom_{k[G]}(C_*, M)$. (On utilise ici le fait classique que pour calculer les foncteurs dérivés du foncteur à deux variables $Hom(A, B)$, on peut au choix fixer A et considérer B comme variable, ou bien faire l'inverse).

On va voir que l'on peut utiliser des méthodes topologiques pour construire de tels complexes. Nous allons nous restreindre au cas $k = M$, qui est, de très loin, le plus important. On pourrait traiter le cas général de manière similaire.

Supposons que l'on dispose d'un espace topologique BG dont le groupe fondamental est $\pi_1(BG) = G$ et dont le revêtement universel, EG, est contractile. (La construction de BG fait l'objet de la section suivante.) On note $C_*(X)$ le complexe cellulaire[2] de l'espace X.

Comme $EG \to BG$ est un revêtement, chaque cellule σ de BG est couverte par un ensemble de cellules dans EG en bijection (non canonique) avec les éléments de G. Ainsi, on peut voir les cellules de BG à la fois comme une base de $C_*(BG)$ en tant que $\mathbb{Z}$-module, ou comme base de $C_*(EG)$ en tant que

[1] Notons que l'anneau de base k n'apparait pas dans les notations, et pour cause, on a toujours $H^*(G, M) = Ext^*_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$. Cependant, la nuance devient un peu plus importante lorqu'on utilise la cohomologie pour étudier les $k[G]$-modules.

[2] on pourra dans tout ce qui suit remplacer "cellulaire" par "singulier".

$\mathbb{Z}[G]$-module. Notons que les différentielles dans $C_*(EG)$ sont $\mathbb{Z}[G]$-linéaires, clairement. Par suite, on a les identifications suivantes (où l'on voit A et k comme des $\mathbb{Z}[G]$-modules avec une action triviale de G) :

$$A \otimes_{\mathbb{Z}[G]} C_*(EG) = A \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(BG)$$

et

$$Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_*(EG), k) = Hom_{\mathbb{Z}}(C_*(BG), k).$$

L'homologie de ces complexes est, par définition, $H_*(BG, A)$, resp. $H^*(BG, k)$. Or, puisque EG est contractile, l'homologie du complexe $C_*(EG)$ est nulle en dimension > 0, et donne $\mathbb{Z}$ en dimension 0. En d'autre termes, $C_*(EG)$ nous fournit une $\mathbb{Z}[G]$-résolution libre de $\mathbb{Z}$ (là encore on voit $\mathbb{Z}$ comme muni d'une action triviale de G). On peut donc conclure que

$$H_*(C_*(EG) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A) = Tor_*^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) = Tor_*^{k[G]}(k, A)$$

et

$$H_*(Hom_{\mathbb{Z}[G]}(C_*(EG), k)) = Ext^*_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, k) = Ext^*_{k[G]}(k, k).$$

En résumé :

Théorème 1.2 – *Soit G un groupe discret, et soit k un anneau, muni de l'action triviale de G. Soit BG un espace topologique tel que $\pi_1(BG) = G$ et ayant un revêtement universel contractile. Alors*

$$H^*(BG, k) = Ext^*_{k[G]}(k, k) = H^*(G, k).$$

Corollaire 1.3 – *Le groupe gradué $Ext^*_{k[G]}(k, k)$ possède une structure d'anneau gradué commutatif.*

Dans le cas général, on peut aussi interpréter $H^i(G, M)$ à l'aide de la cohomologie de BG avec des coefficients "tordus".

On peut, bien sûr, démontrer le corollaire directement par des méthodes purement algébriques. On trouvera trois façons différentes de le faire dans les notes de Carlson[1].

§2. Homotopie des espaces classifiants

G est un groupe topologique.

Définition – On dit que l'action[3] de G sur un espace X est *libre* si on a un carré cartésien :

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{(g,x)\mapsto g\cdot x} & X \\ {\scriptstyle (g,x)\mapsto x}\downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X/G \end{array}$$

De plus, on dit que $X \to X/G$ est un *G-fibré (principal)* si cette application est localement triviale.

[3]disons, à gauche. Mais on se réserve le droit de passer d'une action à gauche à une action à droite par $(x, g) \mapsto g^{-1}x$ et vice-versa.

Proposition 2.1 – *Il existe un G-fibré $E \to B$ avec E contractile.*

Preuve 1 : G groupe de Lie compact. On a $G \subset U(n)$ et $U(n) \to U(n)/G$ est localement triviale, donc on est ramené au cas de $U(n)$. On prend alors $E = V_n^\circ(\mathbb{C}^\infty)$, la variété de Stiefel infinie, ie l'espace des n-uplets unitaires dans $\mathbb{R}^\infty$, qui est contractile, et $B = E/U(n) = G_n(\mathbb{C}^\infty)$, la Grassmannienne infinie, ie l'espace des n-plans dans $\mathbb{C}^\infty$. □

Preuve 2 : cas général. Soit $E(G)$ la catégorie (topologique) suivante. L'espace des objets est G, et on a une flèche et une seule entre g et h, éléments quelconques de G, la composition étant évidente. On note $\hat{h}_g$ la flèche $g \to hg$. On pose $E = |E(G)|$ la réalisation du nerf de $E(G)$ (qui est un espace simplicial).

L'élément neutre de G, noté 1, est initial dans $E(G)$; ainsi il existe une transformation naturelle entre le foncteur "constant" $g \mapsto 1$, $\hat{h}_g \mapsto \hat{1}_1$, et l'identité. Par suite, E est contractile.

On peut associer à chaque $\sigma \in G$ l'unique endofoncteur Φ_σ de $E(G)$ qui sur les objets est donné par $g \mapsto \sigma g$. On a ainsi une application $\phi_\sigma : E \to E$, et on voit à partir de cela que G agit librement sur E, et que $E \to B = EG/G$ est localement triviale, ce qui conclut la preuve.

Précisons que B peut aussi être décrit comme le nerf d'une catégorie : soit $B(G)$ avec un seul objet o et une flèche $\hat{g}$ pour chaque $g \in G$, la composition étant évidente. Alors $B = |B(G)|$. □

Corollaire 2.2 – *G est (faiblement) homotope à ΩB.*

Démonstration. Puisque E est contractile, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & PB \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{=} & B \end{array}$$

où $PB \to B$ est la fibration des chemins, de fibre ΩB. Le résultat découle de la suite exacte des groupes d'homotopie et du lemme des cinq. □

Remarque 2.3. Dans la situation précédente, si G est discret, B doit être un $K(G,1)$, et donc B est caractérisé à homotopie près par l'existence d'un G-fibré de base B et d'espace total contractile. Dans le cas général, on a la proposition suivante.

Proposition 2.4 – *Un G-fibré $E \to B$ avec E contractile est universel, dans le sens où n'importe quel G-fibré $Y \to X$ est un pullback de $E \to B$. Ceci induit une bijection entre les classes d'isomorphisme de G-fibrés au dessus de X et $[X, B]$. En particulier, B est unique à homotopie près.*

La preuve est classique, voir Steenrod[8]. On construit l'application $X \to B$ cellule par cellule, et on utilise le fait (*loc cit*) que tout morphisme de G-fibré est en fait un pullback.

Les modèles pour E et B décris dans la preuve de la proposition 2.1 seront considérés comme canoniques, et on les notera désormais EG et BG. Il est clair que ces constructions sont fonctorielles, ie un homomorphisme de groupes $\phi : G \to H$ induit une application $B\phi : BG \to BH$.

Lorsque G est discret, il est facile de voir que l'on peut choisir des identifications $\pi_1(BG) \approx G$ et $\pi_1(BH) \approx H$ telles que $\pi_1(B\phi) = \phi$. En fait on voit aisément que l'on a les bijections suivantes :

$$Hom(G, H) = [BG, BH]^\bullet$$

et

$$Rep(G, H) = [BG, BH].$$

Ici on note $Rep(G, H)$ pour l'ensemble des homomorphismes de G dans H à conjugaison dans H près.

La situation dans le cas général est plus compliquée. On va donner quelques résultats concernant les applications induites $B\phi$ qui sont valables pour G quelconque, mais les preuves seront restreintes au cas discret pour simplifier.

Proposition 2.5 – *Si $\phi : G \to G'$ est surjective, on a une fibration*

$$B(\ker\phi) \longrightarrow BG \xrightarrow{B\phi} BG' \cdot$$

Preuve pour G et G' discrets. Soit F la fibre de $B\phi$. Vue la suite exacte de groupes d'homotopie, F doit être un $K(\ker\phi, 1)$. □

Proposition 2.6 – *Si $\phi : H \to G$ est injective, on a une fibration*

$$G/H \longrightarrow BH \xrightarrow{B\phi} BG \cdot$$

Plus précisément, si $H \subset G$, l'application $EG/H \to EG/G$ est un modèle pour Bi, où $i : H \to G$ est l'inclusion.

Preuve pour G et H discrets. L'application $f : EG/H \to EG/G$ est clairement une fibration de fibre G/H. On a $EG/G = BG$ et $EG/H \simeq BH$ (unicité). De plus, on peut clairement choisir des identifications $\pi_1(EG/H) \approx H$ et $\pi_1(EG/G) \approx G$ telles que $\pi_1(f) = i$. Le résultat suit. □

Exemple 2.7. Si $G/H \simeq *$, on obtient $BH \simeq BG$. C'est notamment le cas lorsque G et H sont des groupes de Lie et que l'inclusion induit une équivalence $H \simeq G$. Ainsi, on a $BU(n) \simeq BGL_n(\mathbb{C})$ (en particulier $BS^1 \simeq B\mathbb{C}^*$), ou encore $BSO(n) \simeq BSO_n(\mathbb{C})$, etc.

Remarque 2.8. En combinant les deux dernières propositions, on en déduit qu'une suite exacte (courte) de groupes

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \xrightarrow{p} G' \longrightarrow 1$$

donne une suite de fibrations :

$$G' \longrightarrow BH \longrightarrow BG \xrightarrow{Bp} BG' \cdot$$

On peut en outre remarquer que $G' \to BH \to BG$ est (homotope à) un G'-fibré, et que l'application classifiante $BG \to BG'$ n'est autre que Bp. Pour montrer ceci, on construit sans peine un morphisme de G'-fibrés entre $BH \to BG$ et $EG' \to BG'$, et on utilise le fait (classique) que tous les morphismes de fibrés sont des pullbacks.

Terminons par un lemme facile. On a déjà observé le résultat ci-dessus pour G discret.

Lemme 2.9 – *Soit $\sigma \in G$ et $c_\sigma : G \to G$ la conjugaison par g. Alors Bc_σ est homotope à l'identité.*

Démonstration. c_σ est l'application induite par l'endofoncteur T_σ de $B(G)$ qui envoie o sur lui-même et $\hat{g}$ sur $\hat{\sigma}\hat{g}\hat{\sigma}^{-1}$. Le morphisme $\hat{\sigma}^{-1} : o \to o$ constitue alors une transformation naturelle entre T_σ et le foncteur identité. □

Références. La première construction d'un classifiant BG pour n'importe quel groupe topologique G est due à Milnor, voir [4], [5]. La construction par les catégories à été introduite par Segal[7], qui affirme que l'idée était implicite dans les travaux de Grothendieck. On trouvera une présentation très claire de ce type d'idées (nerfs de catégories, transformation naturelles qui se traduisent en homotopies etc) dans Dwyer[2].

La Grassmannienne est décrite en détail dans Milnor et Stasheff[6] : on y trouvera une preuve élémentaire instructive de l'universalité de $EU(n) \to BU(n)$.

Commentaires. On peut généraliser l'isomorphisme $H^*(BG, k) = Ext^*_{k[G]}(k, k)$ au cas où G n'est pas discret, mais cela ne nous sera pas utile pour la suite. Pour mémoire quand même, on peut montrer

$$H^*(BG, k) = Ext^*_{C^*(G,k)}(k, k).$$

Il s'agit d'un *Ext* sur l'algèbre différentielle graduée des cochaines sur l'espace topologique G. On a alors une suite spectrale pour calculer $H^*(BG, k)$ dont le premier terme est $Ext^*_{H^*(G,k)}(k, k)$ (dans le cas discret, cette suite spectrale est triviale).

§3. Exemples

Le groupe $\mathbb{Z}/2$. Ce groupe agit librement sur la sphère infinie $S^\infty = \lim S^n$, qui est contractile, et le quotient est $\mathbb{R}P^\infty$ (d'ailleurs la construction indiquée dans la preuve de la proposition 2.1 donne exactement S^∞ pour $E\mathbb{Z}/2$ et $\mathbb{R}P^\infty$ pour $B\mathbb{Z}/2$). D'où, classiquement,

$$H^*(B\mathbb{Z}/2, \mathbb{F}_2) = H^*(\mathbb{R}P^\infty, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[v]$$

où v est de degré 1.

Les groupes S^1 et $\mathbb{Z}/n$. On peut, comme ci-dessus, montrer que $BS^1 = \mathbb{C}P^\infty$, et la cohomologie de cet espace est bien connue. Cependant, on va retrouver le résultat, ainsi que le calcul de la cohomologie de $\mathbb{Z}/n$, en utilisant la suite de Gysin. Rappelons l'énoncé suivant (voir par exemple [3], 5.2).

Proposition 3.1 (Suite de Gysin) – *Soit $F \to E \to B$ une fibration, où B est 1-connexe et F a la cohomologie d'une sphère S^n. Alors on a une suite exacte longue naturelle*

$$H^*(B,k) \xrightarrow{\gamma} H^{*+n+1}(B,k) \longrightarrow H^{*+n+1}(E,k) \longrightarrow H^{*+1}(B,k)$$

où $\gamma(x) = ux$ pour un certain $u \in H^{n+1}(B, k)$.

Par exemple, appliquons ceci à la fibration universelle $S^1 \to ES^1 \to BS^1$ pour $k = \mathbb{Z}$ (notons que BS^1 est un $K(\mathbb{Z}, 2)$ d'après le corollaire 2.2, il est donc bien 1-connexe). L'espace total étant contractile, on en déduit qu'il existe un élément $u \in H^2(BS^1, \mathbb{Z})$ donnant par multiplication une période $H^*(BS^1, \mathbb{Z}) \to H^{*+2}(BS^1, \mathbb{Z})$. On a évidemment $H^0 = \mathbb{Z}$ et $H^1 = \pi_1 = 0$, d'où :

$$H^*(BS^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u].$$

On va maintenant exploiter la remarque 2.8. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/n \longrightarrow S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^n} S^1 \longrightarrow 1$$

et donc une fibration $S^1 \to B\mathbb{Z}/n \to BS^1$ qui est le pullback de la fibration universelle $S^1 \to ES^1 \to BS^1$ par l'application $f : BS^1 \to BS^1$ induite par $z \mapsto z^n$. On a donc la suite de Gysin suivante :

$$H^*(BS^1, k) \xrightarrow{\times u'} H^{*+2}(BS^1, k) \longrightarrow H^{*+2}(B\mathbb{Z}/n, k) \longrightarrow H^{*+3}(BS^1, k) \cdots$$

La première flèche est donnée par la multiplication par un certain u'. Or par naturalité de la suite de Gysin, on doit avoir $u' = f^*(u)$. Puisque $z \to z^n$ induit la multiplication par n sur $\pi_1(S^1) = \pi_2(BS^1) = H^2(BS^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, on a tout simplement $u' = nu$.

Pour $k = \mathbb{Z}$, ceci montre que $H^*(BS^1, \mathbb{Z}) \to H^*(B\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z})$ est surjective de noyau (nu), d'où

$$H^*(B\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u]/(nu).$$

Calculons maintenant la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ lorsque $n = p$ est un nombre premier. En examinant la suite exacte ci-dessus, on obtient tout d'abord la partie paire :

$$H^{2*}(B\mathbb{Z}/p, \mathbb{F}_p) = H^{2*}(BS^1, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[u].$$

Mais cette fois-ci, en degrés impair on observe $H^{2k+1}(B\mathbb{Z}/p, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p$. (Jusqu'ici, le raisonnement est valide pour $\mathbb{Z}/(p^r)$; ce qui suit est spécifique à $\mathbb{Z}/p$). En inspectant la suite exacte de cohomologie induite par la suite de coefficients $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p \to 0$, on voit que le Bockstein $\beta : H^{2k+1}(B\mathbb{Z}/p, \mathbb{F}_p) \to H^{2k+2}(B\mathbb{Z}/p, \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme. Choisissant alors $v \in H^1(B\mathbb{Z}/p, \mathbb{F}_p)$ tel que $\beta v = u$, on a $\beta(vu^k) = u^{k+1}$ et en particulier, vu^k est non nul : c'est donc un générateur de $H^{2k+1}(B\mathbb{Z}/p, \mathbb{F}_p)$.

Pour finir, on a $\beta v = Sq^1 v = v^2 = u$ lorsque $p = 2$, et $v^2 = 0$ lorsque p est impair. On a donc

$$H^*(B\mathbb{Z}/2, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[v]$$

et

$$H^*(B\mathbb{Z}/p, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[u] \otimes \Lambda(v) \quad (\text{avec } \beta v = u) \quad \text{pour } p \text{ impair.}$$

La formule de Künneth donne

Théorème 3.2 – *Soit p un nombre premier impair. Alors*

$$H^*(B(\mathbb{Z}/p)^r, \mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p[u_1, \ldots, u_r] \otimes \Lambda(v_1, \ldots, v_r)$$

avec u_i de degré 2 et v_i de degré 1. De plus, $\beta v_i = u_i$. Lorsque $p = 2$ on a

$$H^*(B(\mathbb{Z}/2)^r, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[v_1, \ldots, v_r]$$

avec v_i de degré 1.

Le groupe $U(n)$. Soit T le tore maximal dans $U(n)$, c'est-à-dire le groupe des matrices diagonales. Il est isomorphe à $(S^1)^n$ et d'après ce qui précède, on a

$$H^*(BT, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$$

avec t_i de degré 2. Le groupe de Weyl est $N(T)/T = S_n$. D'après le lemme 2.9, l'image de l'homomorphisme de restriction $Bi^* : H^*(BU(n), \mathbb{Z}) \to H^*(BT, \mathbb{Z})$ est contenue dans $(H^*(BT, \mathbb{Z}))^{S_n}$ (on a écrit i pour l'inclusion $T \to U(n)$). Or on peut décrire facilement cet anneau : soit σ_k la k-ième fonction symétrique élémentaire de $t_1, \ldots, t_n$, alors on a

$$(H^*(BT, \mathbb{Z}))^{S_n} = \mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n].$$

On va maintenant montrer que Bi^* est injective et que son image est $\mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ tout entier.

Considérons la fibration universelle $EU(n) \to BU(n)$. L'espace $EU(n)$ est obtenu en recollant des fibrations triviales $U \times U(n) \to U$. Soit V l'espace obtenu en recollant des fibrations $U \times \mathbb{C}^n \to U$ en utilisant les mêmes fonctions de transition ; en d'autres termes, soit $V = (EU(n) \times \mathbb{C}^n)/U(n)$: c'est un fibré vectoriel au-dessus de $BU(n)$. Formons maintenant $Fl(V)$, le fibré des drapeaux de V : il s'agit de l'espace obtenu à partir de V en remplaçant chaque fibre $\mathbb{C}^n$ par l'espace $Fl(\mathbb{C}^n)$ des drapeaux dans $\mathbb{C}^n$ (c'est-à-dire en recollant des fibrations $U \times Fl(\mathbb{C}^n) \to U$).

Le groupe $U(n)$ agit transitivement sur $Fl(\mathbb{C}^n)$, et le groupe d'isotropie du drapeau évident est T. Ainsi on a une identification $Fl(\mathbb{C}^n) = U(n)/T$. Ceci montre que $Fl(V)$ s'obtient en recollant des fibrations $U \times U(n)/T \to U$, et donc finalement que $Fl(V)$ n'est autre que $EU(n)/T$. Par suite, l'application $EU(n)/T \to EU(n)/U(n)$, qui d'après la proposition 2.6 est un modèle pour $Bi : BT \to BU(n)$, peut être vue comme la projection $Fl(V) \to BU(n)$.

Il est alors classique que la cohomologie de BT est nécessairement un $H^*(BU(n), \mathbb{Z})$-module libre de rang $n!$; en particulier Bi^* est injective. De plus, $\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]$ est un module libre sur $\mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ de rang $n!$, on peut par exemple prendre la base donnée par les $t_1^{i_1} t_2^{i_2} \cdots t_n^{i_n}$ avec $0 \leq i_k \leq k$. On en déduit facilement qu'il existe $c_k \in H^*(BU(n), \mathbb{Z})$ tel que $Bi^*(c_k) = \sigma_k$, et que finalement

$$H^*(BU(n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_n].$$

Les classes c_k sont appelées *classes de Chern universelles.*

Remarque 3.3. La même méthode montre que

$$H^*(BSU(n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_2, c_3, \ldots, c_n]$$

mais aussi que

$$H^*(BO(n), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[w_1, w_2, \ldots, w_n]$$

et

$$H^*(BSO(n), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[w_2, w_3, \ldots, w_n].$$

Les w_k sont appelées *classes de Stiefel-Whitney universelles.*

Ces résultats sont obtenus par des méthodes complètement différentes dans Milnor-Stasheff[6].

Application : le théorème de Evens-Venkov. C'est le résultat suivant[4] :

THÉORÈME 3.4 – *Soit G un groupe de Lie compact, et k un anneau. Alors $H^*(BG, k)$ est une k-algèbre finiment engendrée.*

Démonstration. On prend un plongement $G \subset U(n)$, et on a alors une fibration $U(n)/G \to BG \to BU(n)$. L'espace $U(n)/G$ est compact, et la cohomologie de $U(n)$ est un anneau de polynômes (sur un nombre fini de générateurs), donc le résultat découle directement de l'existence de la suite spectrale de Serre. □

Références

[1] J. Carlson, *Cohomology and representation theory*, notes de cours. http ://www.math.uga.edu/ jfc/.

[2] W. G. Dwyer and H.-W. Henn, *Homotopy theoretic methods in group cohomology*, Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[3] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, vol. 58 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[4] J. Milnor, *Construction of universal bundles. I*, Ann. of Math. (2), 63 (1956), pp. 272–284.

[5] ——, *Construction of universal bundles. II*, Ann. of Math. (2), 63 (1956), pp. 430–436.

[6] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.

[7] G. Segal, *Classifying spaces and spectral sequences*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., (1968), pp. 105–112.

[8] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.

[4] il existe aussi une version beaucoup plus forte, pour les groupes finis.