Lundi 27 Fevrier : " Théorème de transfert homotopique, suites spectrales et homologie cyclique "

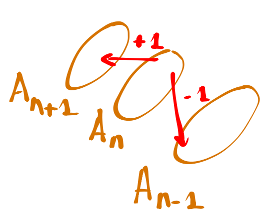
(Bruno Vallette)

Plan :
1. Complexe mixte (A, d, Δ)
2. Multicomplexe = complexe mixte$_\infty$
3. Algèbre de convolution
4. Thm de transfert homotopique (= lemme de perturbation homologique)
5. Interprétation : Eq de pt fixe
6. Suites spectrales
7. Homologie cyclique
8. Trivialisation homotopique

I - Complexes Mixtes

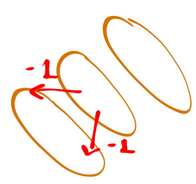
Def (Cplx mixte) Un triplet $(A_\bullet, d, \Delta)$ où $A_\bullet$ espace vect $\mathbb{Z}$-gradué
tq $d^2 = 0$, $\Delta^2 = 0$, $d\Delta + \Delta d = 0$ $\quad |d| = -1$, $|\Delta| = +1$

Ex : Bicomplexes $(C_{\cdot,\cdot}, d_v, d_h)$, $|d_v| = (0,-1)$, $|d_h| = (-1, 0)$ $\quad d_v^2 = 0$, $d_h^2 = 0$, $d_v d_h + d_h d_v = 0$



$\left(A_n := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_{p,n+p} \,;\, d_v, d_h\right)$ cplx mixte

Rq :



$(\text{Tot}\, C)_n = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_{p,n-p}$ $\sim$ presque un cplx mixte.

Ex : • $\left(\Omega^\bullet(M) \,;\, d_{DR} \,;\, J^{-1} d_{DR} J\right)$ — de rham ; $J^{-1} d_{DR} J = d^c = \Delta$ — M variété cplx (Khaler compact par ex) $\quad J \circlearrowleft T^*M$ $\quad d_{DR} = \partial + \bar\partial$

• $\left(\Omega^\bullet(M) \,;\, d_{DR} \,;\, [i_\pi ; d_{DR}]\right)$ — M variété de Poisson ; $[i_\pi ; d_{DR}] = \Delta$ $\quad$ / et idem en géo cpx généralisé

$\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ $\quad [\pi, \pi] = 0$

• Cplx de Dolbeault $\left(\Gamma(M, \Lambda^q \bar{T}^* M \otimes \Lambda^p TM), \bar\partial, \text{div}\right)$ — variété de Calab-Yau

↳ algèbre dg de Batalin - Vilkowisky

$(A_\bullet, d, \Delta, \bullet)$ — d : ordre 1 ; Δ : ordre 2 ; $\bullet$: produit commutatif, ordre 1

• Construction bar $\quad BA = \left(T^c(sA) ; d_1 ; d_2\right)$ — A algèbre commutatif ; d_1 : d_A ; d_2 : $\bullet_A$

• Cplx de Hochschild sur A de Froebenius

$CH^\bullet(A, A)$ $\langle , \rangle$ non-deg - sym $\Rightarrow A \cong A^*$

$\text{Hom}(A^{\otimes n}, A) \cong A^{\otimes n+1}$ — B ; B' $\quad$ Cones - Rienart

II - Multicomplexe

On considère une algèbre A munis d'un endomorphisme d_A
le plus simple qu'on puisse demander est $d_A^2 = 0$

homotopie $h \circlearrowright (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H)$ on demande seulement $ip - id_A = d_A h + h d_A$

$d_A^2 = 0$ retract $\rightarrow (\Delta_1)^2 \neq 0$

Def : Multi complexes de chaînes

$$(A_\cdot , d \,\vdots\, \Delta_1, \Delta_2, \dots)$$

$d = \Delta_0$

donnée homologique $\leftarrow$ $\rightarrow$ donnée algébrique $|\Delta_n| = 2n-1$

tel que $\sum_{i=0}^{n} \Delta_i \Delta_{n-i} = 0 \iff d\Delta_n + \Delta_n d = -\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i \Delta_{n-i}$

Ex : $d^2 = 0$; $n=0$; $d\Delta_1 + \Delta_1 d = 0$; $d\Delta_2 + \Delta_2 d = -\Delta_1^2$

homotopie pour $\Delta_1^2 = 0$

Rq : Si on note $\tilde{\Delta} = \Delta_0 + \Delta_1 + \dots$

$\sum_{i=0}^{n} \Delta_i \Delta_{n-i} = 0 \iff \tilde{\Delta}^2 = 0$

Thm (Transfert homotopique)

$$\delta_n := \sum_{i_1 + \dots + i_k = n} p \Delta_{i_1} h \dots \Delta_{i_{k-1}} h \Delta_{i_k} i$$

On transfert la structure de gauche à droite en obtenant qqch d'équivalent et non nul !

$h \circlearrowright (A, d) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H, d_H)$

$(\Delta_1, \Delta_2, \dots) \longrightarrow (\delta_1, \delta_2, \dots)$

$i_n = \sum h \,\text{——}\, i$
$p_n = \sum p \,\text{——}\, h$
$h_n = \sum h \,\text{——}\, h$

On promeut la structure homologique en une structure ∞ algébrique.

Def : ∞-morphisme $(A, \Delta_0, \Delta_1, \dots) \overset{(f_0, f_1, \dots)}{\rightsquigarrow} (H, \delta_0, \delta_1, \dots)$ avec $\Delta_0 = d$, $\delta_0 = d_H$, $|f_n| = n$

$$\sum_{i=0}^{n} f_{n-i} \Delta_i = \sum_{i=0}^{n} \delta_{n-i} f_i$$

Ex : $n=0$ $f_0 \Delta_0 = \delta_0 f_0$ ($\Delta_0 = d_A$, $\delta_0 = d_H$) : f_0 morphisme de cplx

$n=1$ $f_1 d_A - d_H f_1 = \delta_1 f_0 - f_0 \Delta_1$

homotopie pour cette relation

III - Algèbre de convolution

$$\mathfrak{a}_{P,A} := \mathrm{Hom}(P^{i}, \mathrm{End}(A))$$

anti shriek, dual Koszul

$\leftarrow$ Structure de P_∞ alg sur A

$\partial\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$

Groupe de jauge $=$ ∞-morphisme (isotopie $f_0 = id_A$)

Ex : cplx mixte $D = T(\Delta)/(\Delta^2)$ — module nilpotent

$\mathfrak{a} = \mathrm{Hom}(T^c(\delta), \mathrm{End}(A))$ $\mathrm{End}(A) = \mathrm{Hom}(A,A)$

$\cong \mathrm{End}(A)[[z]]$ $|z| = 2$

produit $\star$ = produit des series

$D^{i} = T^c(\delta)$ $|\delta| = 2$

cogèbre colibre (parmis conilpotent)

(Rq : Alg Assoc $\hookrightarrow$ Alg prélie $\longrightarrow$ Alg Lie)

$\partial f := d_A f - (-1)^{|f|} f d_A$ $\qquad \partial \in \mathrm{End}(A)[[z]]$

Alg de Lie $\qquad$ "Intériorise la diff" $\hookrightarrow (\partial, 0, 0, \dots)$

$(\mathfrak{g}, d, [\,,]) \longrightarrow (\mathfrak{g} \oplus \varepsilon . k, 0, [\,,])$ $\qquad$ avec $[\varepsilon,\varepsilon]=0$, $[\varepsilon, x] = dx$

$\lambda \in \mathfrak{g}_{n}, n+1 \longmapsto \lambda$

$\alpha \in \mathfrak{g}_{-1} \longmapsto \tilde{\alpha} := \alpha + \varepsilon$

$\partial \alpha + \frac{1}{2}[\alpha,\alpha] = 0 \longmapsto [\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}] = 0$

$\tilde{\alpha} \star \tilde{\alpha} = 0, \quad \tilde{\alpha} = \underset{\Delta_0}{\underset{\|}{\varepsilon}} + \Delta_1 z + \Delta_2 z^2 + \dots$

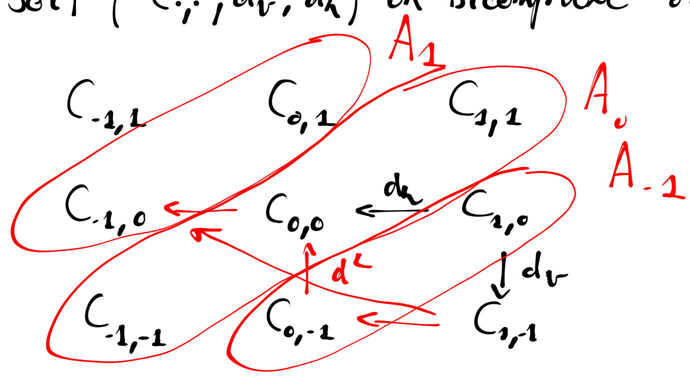
Action du groupe de jauge
$f \star \tilde{\alpha} \star f^{-1} = \tilde{\beta} \Leftrightarrow f \star \tilde{\alpha} = \tilde{\beta} \star f$

Groupe de jauge : $\underbrace{\mathrm{id}_A + f_1 z + f_2 z^2 + \dots}_{f}$
composition = $\star$

(IV et V pas le temps)

VI - Suites spectrales

Soit $(C_{\cdot,\cdot}, d_v, d_h)$ un bicomplexe on lui associe $A_\cdot := \bigoplus_p C_{p, \cdot + p}$ un complexe mixte



$\Delta_2 = p \Delta h \Delta i$

filtration $F_r :=$ colonnes $\leq r$
$= \bigoplus_{p \leq r} C_{p, n+p}$

$\Rightarrow$ Suites spectrales :
$E^0 := (\mathrm{gr} A_\cdot ; d_v)$
$E^1 := (H(\mathrm{gr} A_\cdot) ; d_h)$
$E^2 := (H(\;''\;), d^2)$
$\vdots$
$E^r := (H(\;''\;), d^r)$

TTH : $A_\cdot \overset{h}{\circlearrowleft}$ $\leadsto \Delta$
$i \uparrow \downarrow p \qquad \Downarrow$
$(H(A), d)$ Δ_1
$\vdots \qquad \Delta_2$
Δ_3

Lemme : Δ_r est un relèvement de d^r
$\Delta_1 = d_1$ et $\Delta_r \neq d_r$ en général

Thm : La suite spectrale dégénère en $E^1 \Leftrightarrow \underbrace{\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = 0}$ trivialisation homotopique

$\Leftrightarrow \exists \overset{h}{\circlearrowleft} (A, d_A) \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} (H(A), 0)$

(Si il existe un retract par déformation donnant 0, alors tt ça vaut 0)

$\Leftrightarrow \exists \; 1 + f_1 z + f_2 z^2 + \dots = f$ tq $f(\Delta + d_A) f^{-1} = d_A$

Ex : $(\Omega^\cdot(M), d_{DR}, \Delta = [i_\pi, d_{DR}])$ est homotopiquement trivial.
var de poisson π

$f^{-1}(z) = e^{i_\pi z} = 1 + i_\pi z + \dots$

$e^{i_\pi z}(d) e^{-i_\pi z} = e^{\mathrm{ad}_{i_\pi z}}(d) = \underset{d_{DR}}{\underset{\|}{d}} + \underset{\Delta_2}{\underset{\|}{[i_\pi, d]}} z + \underset{i_{[\pi,\pi]}=0}{\underset{\|}{[i_\pi, [i_\pi, d]]}} z^2 + \dots$ alors tt le rest vaut 0 !

$\hookrightarrow H^\cdot(M_{0,n+1}) \hookrightarrow H^\cdot_{DR}(M)$

Donc la suite spectrale dégénère à la page 1.

espace des modules de courbes

VII - Homologie Cyclique

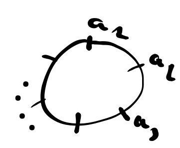
A une algèbre assoc unitaire sur $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$

$$C^{\lambda}(A) \longleftarrow CC(A) \longleftrightarrow B(A) \longleftrightarrow \bar{B}(A)$$

Bicomplexe de l'homologie cyclique avec $A^n := A^{\otimes n}$

$$\begin{tikzcd}
A^3 \arrow[d, "b"'] \arrow[r, bend left, "h"] & A^3 \arrow[l] \arrow[d, "-b'"] & A^3 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^3 \arrow[l] \arrow[d, "-b'"] \\
A^2 \arrow[d, "b"'] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] \\
A & A \arrow[l, "0"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "0"']
\end{tikzcd}$$

$$b(a_1,\dots,a_n) = \underbrace{\sum_i \pm(a_1,\dots,a_ia_{i+1},\dots,a_n)}_{b'} + (a_na_1, a_2,\dots,a_{n-1})$$



$$t(a_1,\dots,a_n) = \pm(a_n, a_1,\dots,a_{n-1})$$

$$N = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}$$

p, i

$$\begin{tikzcd}
A^3 \arrow[d, "b"'] & 0 \arrow[d, "0"] & A^3 \arrow[d, "b"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
A^2 \arrow[d, "b"'] & 0 \arrow[d, "0"] & A^2 \arrow[d, "b"] & 0 \arrow[d, "0"] \\
A & 0 & A & 0
\end{tikzcd}$$

$$HC_\bullet(A) := H(\mathrm{Tot}\, CC(A)) \underset{\text{thm}}{\cong} H(\mathrm{Tot}\, B(A))$$

$$\begin{tikzcd}
A^3 \arrow[d, "b"'] & A^3 \arrow[d, "b"] \arrow[dl, "B"'] \\
A^2 \arrow[d, "b"'] & A^2 \arrow[d, "b"] \arrow[dl, "B"'] \\
A & A
\end{tikzcd}$$

TTH : $\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = (1-t)hN =: B$

$\Delta_{2n+1} = 0 \quad \forall n$

Thm classique

$$\boxed{\begin{matrix} A^3/1-t \\ \downarrow b \\ A^2/1-t \\ \downarrow b \\ A/1-t \end{matrix}} = H(CC(A), d_h)$$