Mardi 28 Fevrier : " Algèbres et complexes mixtes gradués "

(Damien Calaque)

Notations

k corps de caractéristique 0

Cpx = catégorie des complexes de cochaînes

Structure de modèle : équiv faibles = q-iso
fibrations = surjectif en chaque degré
cofibrations = injectifs en chaque degré

I- Motivations

M variété différentielle

$DR(M) = (\Omega^\cdot(M), d_{DR})$

→ k-forme sur M ⟺ k cochaînes de $DR(M)$
→ k-forme fermée sur M ⟺ k-cocycle de $DR(M)$
→ deux k-formes fermés sont equivalentes ⟺ elles diffèrent par un cobord

Variante algébrique

A algèbre commutative unitaire (lisse)

$DR(A)$ complexe, en degré k, $\Lambda^k_A \Omega^1_A$ où $\Omega^1_A = I/I^2$ avec $I = \ker(m : A^{\otimes 2} \to A)$
$= A$-module engendré par da $(a \in A)$

$d(ab) = adb + bda$
$d(a+b) = da + db$
$d1 = 0$

On a une dérivation $d : A \to \Omega^1_A$; $a \mapsto da$

On étend d par la formule de Leibniz gradué à $DR(A)$:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge d\beta$$

Plus compacte : $DR(A) = S_A(\Omega^1_A[-1])$
avec $d(a) = da$
et $d(adb) = da.db$

Rq: On peut tout à fait effectuer cette construction avec A une dg-algèbre commutative
⚠ on a une différentielle "interne" $d_{int} = d_A$

Une forme = d_{int}-fermé
Une forme fermé = $(d_{int} + d_{DR})$-fermé

Structure sur $DR(A)$

→ c'est un complexe (d_{int})
→ admet une graduation auxiliaire / poids
= puissances symétrique
→ La différentielle interne d_{int} est de poids 0
→ 2^{nde} différentielle $\varepsilon = d$ de degré 1 et de poids 1 qui commute avec d_{int}

} C'est la définition formelle d'un complexe mixte gradué.

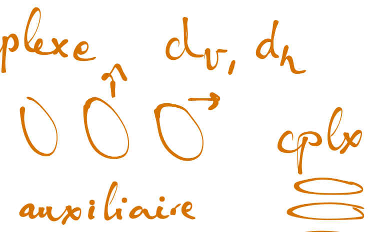
→ admet un produit commutatif qui en fait un monoïde commutatif dans ε-Cpx^{gr}
Autrement dit : $DR(A)$ est une algèbre mixte graduée

Rq: $A \mapsto \Omega^1_A$ n'est pas exact. Il faut tjs faire un remplacement cofibrant de A avant d'appliquer $DR(-)$

Ex: exemples de complexe mixte gradué

$C^{\cdot\cdot}$ bicomplexe d_v, d_h

$Tot(C)$



graduation auxiliaire $\qquad \varepsilon = d_v$

2 complexes mixtes gradués naturellement associés à un bicomplexe

II – Théorie homotopique des cpx mixtes gradués

$$\varepsilon\text{-}Cpx^{gr} \xrightarrow[\text{"oubli de } \varepsilon\text{"}]{(-)^{\#}} Cpx^{gr}$$

2 structures de modèle

structure de modèle provient de Cpx

→ injective : equiv faibles et cofibrations sont celles de Cpx^{gr}

→ projective : equiv faibles et fibrations sont celles de Cpx^{gr}

On a aussi un foncteur de Quillen à gauche $\begin{array}{ccc} Cpx & \longrightarrow & \varepsilon\text{-}Cpx^{gr} \\ V & \longmapsto & V \end{array}$ en poids 0 avec $\varepsilon = 0$

Adjoint de Quillen à droite $|\cdot| : \varepsilon\text{-}Cpx^{gr} \longrightarrow Cpx$

$$|E| = Hom_{\varepsilon\text{-}Cpx^{gr}}(i_0(k), E)$$
$$= \ker(\varepsilon : E_{(0)} \to E_{(1)})$$

Rq : 2 manières de calculer $\mathbb{R}Hom_{\varepsilon\text{-}Cpx^{gr}}(i_0(k), E)$

- $Hom_{\varepsilon\text{-}Cpx^{gr}}(i_0(k), \tilde{E})$ où $\tilde{E}$ remplacement fibrant de E (structure injective)
- $Hom_{\varepsilon\text{-}Cpx^{gr}}(\tilde{k}, E)$ $\tilde{k}$ le remplacement cofibrant de $i_0(k)$ par la structure projective

Explicitement :

$$\tilde{k} = k\{x_n, y_n\}_{n \geq 0}$$

$deg(x_n) = 0$ $pds(x_n) = n$

$deg(y_n) = 1$ $pds(y_n) = n+1$

$d_{int}(x_n) = y_{n-1}$ $(y_{-1} = 0)$

$\varepsilon(x_n) = y_n$

$$\begin{tikzcd} & y_0 & & y_1 & & y_2 \\ x_0 \arrow[ur] & & x_1 \arrow[ul, "d"] \arrow[ur] & & x_2 \arrow[ul] \arrow[ur] & & x_3 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{R}Hom_{\varepsilon\text{-}Cpx^{gr}}(i_0(k), E) = Hom_{\varepsilon\text{-}Cpx^{gr}}(\tilde{k}, E)$$

Un élément est donné par

- $x_0 \in E_{(0)}$ 0-cocycle
- $x_1 \in E_{(1)}$ $\varepsilon(x_0) = d(x_1)$

$\vdots$

$x_n \in E_{(n)}$ $\varepsilon(x_n) = d(x_{n+1})$

$$(-)^{\#} : \varepsilon\text{-}Cpx^{gr} \longrightarrow Cpx^{gr}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}Hom_{\varepsilon\text{-}Cpx}(i_0(k), E) & \ni & (x_0, x_1, \dots) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{R})Hom_{Cpx^{gr}}(k, E) & & x_0 \end{array}$$

- Une p-forme de degré $\overset{pds\ n}{0}$ sur A est un élément de $(\mathbb{R})Hom_{Cpx^{gr}}(k, DR(A)^{\#}[p]_{+n}(p))$
- Une p-forme fermée de degré $\overset{n}{0}$ sur A est un élément de $\mathbb{R}Hom_{\varepsilon\text{-}Cpx^{gr}}(i_0(k), DR(A)[p]_{+n}(p))$

III - Lien avec les complexes filtrés

Lemme : $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{-}Cpx^{gr}}(k(i+1), k(1)) \simeq k$

Demo : • $i=-1$

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{-}Cpx^{gr}}(i_0(k), k(-1)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{-}Cpx^{gr}}(\tilde{k}, k(-1)) = k \cdot x_1$

On a donc, dans la catégorie homotopique de $\mathcal{E}\text{-}Cpx^{gr}$, on a une suite

$$h(\infty) = (\dots \to k(i+1) \to k(i) \to \dots)$$

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(h(\infty), -) = |-|^{filtr}$$

$$h(\mathcal{E}\text{-}Cpx^{gr}) \longrightarrow h(Seq(Cpx))$$

Rappel : $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}\text{-}Cpx^{gr}}(i_0(h), E) = \underset{E(\geq 0)}{\overset{\|}{(\prod_{p\geq 0} E(p)}}, d_{int} + \mathcal{E})$

$|E|^{filt} = (\dots \to E(\geq i+1) \to E(\geq i) \to E(\geq i-1) \to \dots)$

Rq : $|E|^{filtr}$ est un vrai complexe filtré
ie : un objet cofibrant de $Seq(Cpx)$

Question : $|-|^{filtr}$ est-il une équivalence

$F_\cdot \in Seq(Cpx)$

$\rightsquigarrow E_i = F_i / F_{i+1}$ (si $F_\cdot$ cofibrant)

$= \text{cône}(F_{i+1} \to F_i)$ (sinon)

$F_{-\infty} = \mathrm{colim}\, F_\cdot = (\prod_i E_i, \; d = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots)$

$(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ complexe gradué $d_{int} = \mathcal{E}_0$

qui admet une structure de complexe mixte gradué faible (à homotopie près)

Ce sont les multicomplexes de Bruno (ds son exposé)
$\mathcal{E}_i$ $(=\Delta_i)$ est de poids i de degré 1

Lien avec l'exposé de Bruno

$(E_\cdot, \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots)$ complexes gradué mixte faible

$\rightsquigarrow A^n = \prod_{q-2p=n} E_p^q$ $\qquad \mathcal{E}_i : E_p^q \longrightarrow E_{p+i}^{q+1}$

$\qquad\qquad q-2p \longmapsto q+1-2p-2i$

Résumé :

dans les catégories homotopiques

$$\mathcal{E}\text{-}Cpx^{gr} \xhookrightarrow{\sim} \mathcal{E}\text{-}Cpx^{gr}_\infty \underset{\text{ce qu'on vient de décrire}}{\overset{\text{realisation}}{\rightleftarrows}} Filt\,Cpx$$

equivalence ?
question ouverte