Mardi 28 Février : "Représentation de l'∞-groupoïde de déformation"

(Daniel Robert-Nicoud)

I - Théorie de la déformation

char $k = 0$ cochaînes $\rightsquigarrow$ MC deg $= 1$

Problème de déformation $\Longleftrightarrow$ dg Lie / $\mathcal{L}_\infty$
MC + jauges

Classiquement $\mathfrak{g} \in$ dgLie $\rightsquigarrow$ grpd de Deligne
obj $= MC(\mathfrak{g})$
morph $=$ jauges

$$MC(\mathfrak{g}) = \{ \alpha \in \mathfrak{g} \,/\, \deg \alpha = 1, \ d\alpha + \tfrac{1}{2}[\alpha,\alpha] = 0 \}$$

jauges $\lambda \in \mathfrak{g}^0 \rightsquigarrow$ Champs de vecteurs

$$\begin{aligned} MC &\longrightarrow TMC \\ \alpha &\longmapsto d\lambda + [\lambda,\alpha] \end{aligned}$$

jauges $=$ flots

$\alpha_0 \sim \alpha_1 \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathfrak{g}^0$ tq le flot $\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = d\lambda + [\lambda, \alpha(t)] \\ \alpha(0) = \alpha_0 \end{cases} \rightsquigarrow \alpha(1) = \alpha_1$

Analogue Supérieur

∞-groupoïde de Deligne - Hinich - Getzler

Def : $MC_\bullet(\mathfrak{g}) := MC(\mathfrak{g} \otimes \Omega_\bullet) \in$ sSet

$\hookleftarrow d\alpha + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \ell_n(\alpha, \dots, \alpha) = 0$

$$\Omega_\bullet = k[\overset{0}{t_0}, \overset{\dots}{\dots}, \overset{0}{t_n}, \overset{1}{dt_0}, \overset{\dots}{\dots}, \overset{1}{dt_n}] \,/\, (\textstyle\sum t_i = 1, \sum dt_i = 0)$$

Formes diff polynomiales sur Δ^n algèbre de Sullivan | alg comm simpliciale

$$\ell_n(\alpha_1 \otimes x_1, \dots, \alpha_n \otimes x_n) = \pm\, \ell_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \otimes x_1 \dots x_n$$

$$\mathcal{L}_\infty \otimes \mathcal{C}om \cong \mathcal{L}_\infty$$

Rq :

- $\Omega_0 = k \Rightarrow MC_0(\mathfrak{g}) = MC(\mathfrak{g} \otimes \Omega_0) = MC(\mathfrak{g})$
- $\Omega_1 \cong k[t, dt]$, $\underbrace{\alpha(t)}_{\text{poly en } \mathfrak{g}^1} + \overset{\swarrow \text{ poly en } \mathfrak{g}^0}{\lambda(t)}\, dt \in (\mathfrak{g} \otimes \Omega_1)^1$

$$\alpha(t) + \lambda(t)\, dt \in MC \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha(t) \in MC(\mathfrak{g}) & \forall t \in k \\ \dot{\alpha}(t) = d_{\mathfrak{g}} \lambda(t) + [\lambda(t), \alpha(t)] & \forall t \in k \end{cases}$$

Thm : [Hinich, Getzler]

$\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ $\mathcal{L}_\infty$-morphisme surj $\Rightarrow MC_\bullet(\phi) : MC_\bullet(\mathfrak{g}) \longrightarrow MC_\bullet(\mathfrak{h})$
Fibration en sSet

En particulier : $MC_\bullet(\mathfrak{g})$ est un complexe de Kan
$\forall\, \mathfrak{g} \in \mathcal{L}_\infty$-alg

"Problème" $MC_\bullet(\mathfrak{g})$ "très grand"

II - Contraction de Dupont et $\gamma_\bullet$.

Sous cplx de cochaînes $C_\bullet \subseteq \Omega_\bullet$ de dim finie

$$C_n := \mathrm{Vect}_k(w_I \mid \emptyset \neq I \subseteq \{0,\dots,n\})$$

$$w_I := \frac{1}{h!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j t_{i_j} \, dt_{i_0} \dots \widehat{dt_{i_j}} \dots dt_{i_k} \quad \text{où} \quad I = \{i_0 < \dots < i_k\}$$

(Complexe cellulaire de Δ^n)

Dupont Contraction Simpliciale

$$h_\bullet \circlearrowright \Omega_\bullet \underset{i_\bullet}{\overset{p_\bullet}{\rightleftarrows}} C_\bullet \qquad 1 - ip = dh + hd \qquad \left.\begin{array}{l} hi = 0 \\ ph = 0 \\ h^2 = 0 \end{array}\right\} \text{"contraction"}$$

Getzler

$$\gamma_\bullet(g) := \{ \alpha \in MC_\bullet(g) \mid (1 \otimes h_\bullet)(\alpha) = 0 \}$$

Faits :

- $\gamma_\bullet(g)$ Kan (= fibrant dans sSet)
- $\gamma_\bullet(g) \underset{\text{faiblement équivalent}}{\simeq} MC_\bullet(g)$ en sSet

Mais est compliqué à décrire (h est compliqué)

III - Une autre construction

g $\mathcal{L}_\infty$-algèbre $\rightsquigarrow$ étend la contraction

$$1 \otimes h_\bullet \circlearrowright g \otimes \Omega_\bullet \underset{1 \otimes i_\bullet}{\overset{1 \otimes p_\bullet}{\rightleftarrows}} g \otimes C_\bullet$$

$$\mathcal{L}_\infty \overset{HTT}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}_\infty$$

Thm :[R] $MC_\bullet(g) \simeq MC(g \otimes C_\bullet)$

Rq: Bandiera montre $MC(g \otimes C_\bullet) \underset{iso}{\cong} \gamma_\bullet(g)$ $\Rightarrow$ Thm precedent

Structure de la démo

HTT $\rightsquigarrow$ étend $1 \otimes p_\bullet$, $1 \otimes i_\bullet$ en ∞-q-iso

$\rightsquigarrow$ induit sur $MC_\bullet$: $P_\bullet : MC_\bullet(g) \rightleftarrows MC(g \otimes C_\bullet) : I_\bullet$.

- easy : $P_\bullet I_\bullet = 1_{MC(g \otimes C_\bullet)}$
- théorie de l'homotopie $I_\bullet P_\bullet$ est une equiv faible.

IV Kan

Prop: $\phi : g \to h$ surj $\Rightarrow MC(\phi \otimes 1_C)$ fibration

preuve :

$$\begin{tikzcd}
MC(g \otimes C_\bullet) \arrow[r, "I_\bullet"] \arrow[d, "MC_\bullet(\phi\otimes 1)"'] \arrow[rr, bend left, "Id"] & MC_\bullet(g) \arrow[r, "P_\bullet"] \arrow[d, "MC(\phi)"] \arrow[dr, phantom, "\text{fibration Hinich, Getzler}"] & MC(g \otimes C_\bullet) \arrow[d, "MC(\phi \otimes 1)"] \\
MC(h \otimes C_\bullet) \arrow[r, "I_\bullet"] \arrow[rr, bend right, "Id"'] & MC_\bullet(h) \arrow[r, "P_\bullet"] & MC(h \otimes C_\bullet)
\end{tikzcd}$$

V Le cas Lie

$\mathfrak{g} \in$ dg-Lie

Thm : $\exists$ dg Lie cosimpliciale $mc_\bullet$ tq $\forall \mathfrak{g} \in$ dgLie

on a : $\underset{\substack{\text{\rotatebox{90}{$\cong$}} \\ \gamma_\bullet(\mathfrak{g})}}{MC(\mathfrak{g} \otimes C_\bullet)} \cong \hom_{dgLie}(mc_\bullet, \mathfrak{g})$

Preuve : Aprés la pause

Construction de $mc_\bullet$

$$\begin{tikzcd} \Omega_\bullet \arrow[loop left, "h_\bullet"] \arrow[r, shift left, "p_\bullet"] & C_\bullet \arrow[l, shift left, "i_\bullet"] \end{tikzcd}$$

alg com $\overset{HTT}{\rightsquigarrow}$ alg comm à homotopie près $\mathcal{C}_\infty$ simpliciale

On dualise $C_\bullet$: "$\mathfrak{g} \otimes C_\bullet = \hom(C_\bullet^\vee, \mathfrak{g})$"

On suspend $sC_\bullet^\vee \rightsquigarrow \deg(MC) = 1$

$mc_\bullet := \widehat{\Omega}_\pi(sC_\bullet^\vee)$

$\pi : B\mathrm{Lie} \to \mathrm{Lie}$

explicitement : $mc_\bullet = \widehat{\mathrm{Lie}}(sC_\bullet^\vee)$

$= \prod_{n \geq 0} \mathrm{Lie}(n) \otimes (sC_\bullet^\vee)^{\otimes n}$

différentielle : $d_{mc_\bullet} = d_1 + d_2$

- d_1 étend la duale de $d_{C_\bullet}$
- d_2 étend $\underset{\text{duale de structure } \mathcal{C}_\infty}{sC_\bullet^\vee \longrightarrow \widehat{\mathrm{Lie}}(sC_\bullet^\vee)}$

Prop : . $mc_0 \cong$ alg libre sur un élement de MC

$= k\alpha \oplus k[\alpha, \alpha]$

$d\alpha = -\frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$

. $mc_1 \cong$ alg de Laurence-Sullivan

$= \widehat{\mathrm{Lie}}(\underset{1}{\alpha_0} \oplus \underset{1}{\alpha_1} \oplus \underset{0}{\lambda})$, $d = \ldots$

code 2 él de MC α_0, α_1 jaug eq $\alpha_0 \overset{\lambda}{\rightsquigarrow} \alpha_1$

$MC_\bullet(\mathfrak{g}) \cong \hom_{dglie}(mc_\bullet, \mathfrak{g})$

VII Opérades principales

$\$$: $\mathcal{L}_\infty := \Omega \mathrm{Lie}^{i} = \Omega \mathrm{com}^\vee$

$\mathrm{Com}(n) = \mathrm{Span}_k \, \mu_n$

$\rightsquigarrow$ gén de $\mathcal{L}_\infty$ $\ell_n := \mu_n^\vee$

$\longrightarrow$ char $k = 0$

ns $A_\infty := \Omega As^{i} = \Omega As^\vee$

$\longrightarrow$ k qcq

VIII Thm principal

P, Q dg Op , $\varphi : Q \to P$ morphisme de dg op

$\rightsquigarrow \forall n : \varphi(n) : Q(n) \to P(n)$ + relations

$\rightsquigarrow$ Appli $\ell_n = \mu_n^\vee \longmapsto (\varphi(n) : \underset{\substack{\cap\!\shortmid \\ BQ(n)}}{Q(n)} \to P(n))$

$\Rightarrow$ unique extension en morphisme d'op algébrique (pas dg)

$W_{\bar{\varphi}} : \mathcal{L}_\infty \to \hom(BQ, P)$

$\llcorner$ op de convolution

$(ns : A_\infty)$

Thm : $W_{\bar\Psi}$ est un morphisme d'op algébrique
+ "compatibilité" avec les composition

$$\begin{tikzcd}
 & \hom(BR,Q) \arrow[d, "\bar\Psi_*"] \\
\mathcal{L}_\infty \arrow[ur, "W_\theta"] \arrow[r, "W_{\bar\Psi\theta}"] \arrow[dr, "W_{\bar\Psi}"'] & \hom(BR,P) \\
 & \hom(BQ,P) \arrow[u, "\theta^*"']
\end{tikzcd}$$

Cas dual : Si $\dim Q(n) < \infty$, $\forall n$ + réduite
$\Rightarrow \dim BQ(n) < \infty$
$\Rightarrow \hom(BQ,P) \cong P_\otimes (BQ)^\vee \cong P_\otimes \underbrace{\Omega(Q^\vee)}_{Q^!_\infty}$

Au niveau des alg

A P-alg , C $Q^!_\infty$-alg , D BQ-coalg

$\Rightarrow A \otimes C$, $\hom(D,A)$ sont des $\mathcal{L}_\infty$

Notation $A \otimes^{\bar\Psi} C$, $\hom^{\bar\Psi}(D,A)$

$id_{Lie} : Lie \longrightarrow Lie$

$\rightsquigarrow M_{Lie} : \mathcal{L}_\infty \longrightarrow Lie \otimes \Omega \overset{can}{\overbrace{Lie^\vee}} = Lie \otimes \mathcal{C}_\infty$

IX Cas bin quad , morphisme de manin

Op bin quad : produits de Manin $\bullet$, $\circ$
tq $\hom_{op\,bin\,quad}(R \bullet Q, P) \cong \hom_{op\,bin\,quad}(R, P \circ Q^!)$

ie : $- \bullet Q$, $- \circ Q^!$ adjoint en plus : Lie unité pour $\bullet$

$\Rightarrow \bar\Psi : Q \cong Lie \bullet Q \longrightarrow P$

$\updownarrow$

$$\begin{tikzcd}
m_{\bar\Psi} : Lie \arrow[r] & P \circ Q^! \arrow[d, "canonique"] \\
 & P \otimes Q^!
\end{tikzcd}$$

Prop:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_\infty \arrow[r, "M_{\bar\Psi}"] \arrow[d, "can"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P \otimes Q^!_\infty \arrow[d, "can"] \\
Lie \arrow[r, "m_{\bar\Psi}"'] & P \otimes Q^!
\end{tikzcd}$$

Donc $M_{\bar\Psi}$ généralise $m_{\bar\Psi}$ aux alg homotopiques

X Fonctorialité

A, A' P-alg , C $Q^!_\infty$-alg $f : A \to A'$ de P-alg

$\rightsquigarrow A \otimes^{\bar\Psi} C \longrightarrow A' \otimes^{\bar\Psi} C$ morphisme de $\mathcal{L}_\infty$-alg
$a \otimes c \longmapsto f(a) \otimes c$

Prop : $\otimes^{\bar\Psi}$ s'étend en un bifoncteur $\otimes^{\bar\Psi} : P\text{-alg} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \infty\text{-morphismes}}}{\infty}\text{-}Q^!_\infty\text{-alg} \longrightarrow \infty\text{-}\mathcal{L}_\infty\text{-alg}$

XI Compatibilité avec HTT

A P-alg , $Q^!$- alg B

rétraction $h \circlearrowright B \underset{i}{\overset{p}{\rightleftarrows}} C$

Deux façons de mettre une str $\mathscr{L}_\infty$ sur $A\otimes C$

i) HTT ⇝ C est une $Q^!_\infty$-alg
$A \otimes^{\psi} C$ $\mathscr{L}_\infty$ alg

ii) $\underbrace{A\otimes B \text{ est une alg}}_{=A\otimes^{\psi}B}$ $\underline{\text{de Lie (par } m_\psi)}$

⇝ Retraction induite $1\otimes h \circlearrowright A\otimes B \underset{1\otimes i}{\overset{1\otimes p}{\rightleftarrows}} A\otimes C$

HTT : $A\otimes C$ est une $\mathscr{L}_\infty$-alg

Thm : Les deux structures sont les mêmes

XII Elements de MC

Q: A P-alg , D BQ-coalg , $MC(hom^{\psi}(D,A)) = ?$

$\psi : Q \to P$ induit un morphisme tordant

$$\psi = (BQ \xrightarrow{\pi} Q \xrightarrow{\psi} P)$$

⇒ adjonction bar-cobar (complété)

$$\hat{\Omega}_\psi : BQ\text{-coalg} \rightleftarrows \tilde{P}\text{-alg} : \hat{B}_\psi$$

Thm : $MC(hom^{\psi}(D,A)) \cong hom_{dg\,P\text{-alg}}(\hat{\Omega}_\psi(s^{-1}D), A)$

XIII Applications

1) On étudiait $MC(\mathfrak{g}\otimes C.)$ où $\mathfrak{g}\otimes C.$ une $\mathscr{L}_\infty$ par HTT $\circlearrowright \mathfrak{g}\otimes C. \rightleftarrows \mathfrak{g}\otimes C.$

On a montré : meme chose $\mathfrak{g}\otimes C.$ avec $\psi = id_{Lie} : Lie \to Lie$

action de ψ_n par $\circlearrowright \Omega. \rightleftarrows C.$

$\Rightarrow MC(\mathfrak{g}\otimes C.) \cong hom_{dg\,Lie}(\hat{\Omega}_\pi(sC.), \mathfrak{g})$

2) Deformation de morphisme de P-alg :

X, Y P-alg , Y complète

morphismes $X \to Y$
Remplacement cofibrant $\Omega_\pi B_\pi X \xrightarrow{\sim} X \to Y$
$\overset{\text{Quillen}}{⇝}$ On étudie $hom_{dg\,P\text{-alg}}(\Omega_\pi B_\pi X, Y) \underset{\text{Thm}}{\cong} MC(hom^{op}(sB_\pi X, Y))$

Def : Cplx de def est la $\mathscr{L}_\infty$-alg $hom^{P}(sB_\pi X, Y)$