# Mercredi 1er Mars : " Introduction aux espaces $\mathcal{L}_\infty$ " (Suite)

(Joan Bellier-Millès)

On va voir quelques exemples (en fonction du temps)
- → espaces $\mathcal{L}_\infty$ associés à une variété lisse
- → espaces d'appl dérivés : $\mathrm{Map}(E,X)$, $\mathrm{Map}(S^1,X)$
- → algébroïdes de Lie
- → espaces de modules

## I - Exemple facile

On a un espace $\mathcal{L}_\infty$ $(X,0)$, on trouve $B(X,0)=(X,\Omega^\bullet_X)=X_{dR}$

**Lemme :** Si $(X,g)$ est un espace $\mathcal{L}_\infty$ et $(M,C^\infty_M)$ une variété lisse, alors $B(X,g)(M^{sm})=C^\infty(M,X)$

$$\big(MC(\underbrace{f^*g\otimes I_M}_{=0}\otimes\Omega_M)=\{0\}\big)$$

## II - Espace $\mathcal{L}_\infty$ associé à une variété lisse X

On va construire un espace $\mathcal{L}_\infty$ $(X,g_X)$ tq $C^\bullet(g_X)\underset{q\text{-iso}}{\simeq}C^\infty_X$

$$C^\bullet(g_X)=\mathrm{Hom}_{\Omega_X}(B^{\Omega_X}_{LA}(g_X),\Omega_X),d_{dR})$$

Soit $J(C^\infty_X)\to X$ le fibré des $\infty$-jets de fonctions lisses sur X.
Les sections de ce fibré sont données par le faisceau $\mathcal{J}$

Localement, une section s'écrit $\sigma(x)=\sum_{k\geq 0}\sigma_{i_1,\dots,i_k}(x)\,y^{i_1}\dots y^{i_k}$

Localement on a une connexion

$$\nabla=\underbrace{dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}}_{d_{dR}}-dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial y^i}$$

Les sections plates $(\nabla\sigma=0)$ sont les $\infty$-jets de fonctions lisses :
$\sigma(x)=\sum_k\frac{\partial^{i_1\dots i_k}f}{\partial x^{i_1}\dots\partial x^{i_k}}y^{i_1}\dots y^{i_k}$

La connexion M est plate et elle induit une différentielle $d_\nabla$ sur $\Gamma(\Omega^\bullet_X(J_{BX}))=:dR(\mathcal{J})$

**Lemme :** Il existe une alg $\mathcal{L}_\infty$ $g_X$ sur $\Omega_X$ tq
a) $g_X\cong\Omega^{gr}_X(T_X[-1])$ en tant que $\Omega^{gr}_X$-module

b) $dR(\mathcal{J})\cong C^\bullet(g_X)$ en tant que $\Omega^\bullet_X$-alg

c) l'application
$$C^\infty_X\to dR(\mathcal{J})\cong C^\bullet(g_X)$$
$$f\mapsto\infty\text{-jet}(f)$$
est un q-iso

**Démo :** · b) On peut filtrer $\mathcal{J}$ par l'ordre d'annulation des sections $(m-(y^1,\dots,y^n))$
On a $F^1\mathcal{J}/F^2\mathcal{J}\cong\Omega^1_X$ (aussi $F^k\mathcal{J}/F^{k+1}\mathcal{J}\cong\mathrm{Sym}^k(\Omega^1_X)$)

On choisit un relèvement $\varphi:\Omega^1_X\to F^1\mathcal{J}$
localement on peut prendre $d_{x^i}\mapsto y^i$, mais pas globalement)
On peut étendre $\varphi$ à l'alg sym (propriété univ de la liberté) $\mathrm{Sym}^{>0}(\Omega^1_X)\overset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}}F^1(\mathcal{J})$
puis en ajoutant $\mathrm{Sym}^0(\Omega^1_X)=C^\infty_X$, on obtient b)
(en ajoutant $\Omega^\bullet_X$)

· La différentielle sur $dR(\mathcal{J})$ se transporte en une structure $cL_\infty$ sur $\Omega^\bullet_X(T_X[-1])$

$C^\bullet(g_X) = \mathrm{Sym}_{\Omega_X^{gr}}(\Omega_X(T_X^\vee)) \cong \Omega_X(\mathrm{Sym}_{C^\infty_X}(\Omega^1_X)) / \Omega_X(\mathcal{J})$

Quelle est la structure $cL_\infty$ ?

Caractérisé par $T_X^\vee \to \Omega_X$

$T_X^\vee \to \Omega^\bullet_X \otimes T_X^\vee$

$T_X^\vee \to (\Omega^\bullet_X \otimes_{C^\infty_X} T_X^\vee)^{\otimes 2}$

Sur $\mathbb{R}^n$, on a $\nabla = dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} - dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$

$\ell_1 : T_X^\vee \longrightarrow \Omega^1_X \otimes_{C^\infty_X} T_X^\vee$

$f_i(x) y^i \longmapsto dx^j \otimes \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x) y^i$

$\ell_0 : T_X^\vee \longrightarrow \Omega^1_X$

$f_i(x) y^i \longmapsto dx^i \otimes f_i(x)$

⚠ Globalement ce n'est plus vrai le terme "$dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^i}$" fait apparaître le même $\ell_0$ mais aussi des $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$

Rq :

$$\begin{array}{ccccc} X & \longmapsto & C^\infty(-,X) : \mathrm{Man}^{op} & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (X, g_X) & \longmapsto & B(X, g_X) \quad \mathrm{dgMan}^{op} & \longrightarrow & s\mathrm{Set} \end{array}$$

$(X, g_X)$ est un enrichissement de $X$ au sens où $B(X, g_X)$ étend $C^\infty(-,X)$. Le lemme nous dit que $(X, g_X)$ est une sorte de remplacement fibrant de $X$.

## III - Algébroïde de Lie

Def : Un algébroïde de Lie sur $X$ est un fibré vectoriel $L \to X$ muni d'une struct d'algèbre de Lie sur $\mathcal{L} = \Gamma(X, L)$ et d'une ancre $\rho : L \to T_X$ (au-dessus de $X$) tq

1) $\Gamma(X, L) \xrightarrow{\rho_*} \Gamma(X, T_X)$ est un morphisme d'alg de Lie

2) $\forall x, y \in \Gamma(X, L)$ et $f \in C^\infty_X$, on a $[x, f \cdot y] = f[x, y] + (\rho(x) f) y$

Ex : · Une alg de Lie donne un algébroïde de Lie au dessus d'un point

· Un feuilletage (régulier) sur une variété lisse $X$ donne un algébroïde de Lie

Complexe de CE $\quad C^\bullet(L) := (\Gamma(X, \widehat{\bigoplus_{k \geq 0}} \Lambda^k L^\vee), d_L)$

$\hookrightarrow H^\bullet_L(X) =$ cohomologie de l'algébroïde

Il existe un enrichissement $cL_\infty$ de $X$

$(X, \mathrm{enh}(L))$ tq $C^\bullet(L) \hookrightarrow C^\bullet(\mathrm{enh}(L))$

Soit un q-iso $\quad \mathrm{enh}^\vee L \simeq \Omega_X(T_X[-1] \oplus L)$