

Schobers Perverse d'après Kapranov-Schectman [Clément Dupont, Montpellier, 2016] | Posons $V := V_b \Rightarrow \Gamma(U_0; \mathcal{V}) \xrightarrow{\cong} V$ (identifications)

der Schobers : allemand pour "champ" [meux : "meule"]
 But: Développer une théorie des "faisceaux pervers" en catégorie triangulée (déf encore conjecturale)

1) Les schobers pervers sont les "fonctions sphériques"
 4) en cours de développement [Dyckerhoff - K-S - Seibelman]

$\Gamma(U_2; \mathcal{V}) \xrightarrow{\cong} V$
 $\Gamma(A_+; \mathcal{V}) \xrightarrow{\cong} V$
 choix: $\Gamma(A_-; \mathcal{V}) \xleftarrow{\cong} \Gamma(U_2; \mathcal{V})$
 $V \xleftarrow{\cong}$

Schobers pervers $\xrightarrow{k_0}$ Faisceaux pervers

"catégorification"

Motivation: application à la géo symplectique.

Citation: "les Schobers sont les coeffs naturels pour les cat de Fukaya."

Moyen : s'inspirer de descriptions de certaines catégories de faisceaux pervers comme des cat. de rep de carquois

- on peut faire pour:
- 1) disque pointé [Beilinson, Deligne]
 - 2) \mathbb{C}^n stratifié par les $\{z_i=0\}$ [Gialigo-Granger-Maisonobe]
 - 3) Arrangements d'hyperplans réels [KS]
 - 4) Surfaces [KS]
 - 5) Mac Pherson - Vilonen

① Échauffement (\mathbb{F}_2 corps).

Δ disque unité de \mathbb{C}

$\Delta^x := \Delta \setminus \{0\}$

Somme $\text{Loc}(\Delta^x) \simeq \left\{ \begin{array}{c} V \xleftarrow{\tau} \tau \circ 0 \\ \uparrow \\ \text{dim finie} \end{array} \right\}$
 "monodromie"

pour $V \in \mathcal{T}$, alors on a
 $H^0(\Delta^x; \mathcal{V}) \simeq V^T := \ker(1-T)$
 $H^1(\Delta^x; \rightarrow) \simeq V_T := \text{coker}(1-T)$
 $H^n(\rightarrow) \simeq 0 \quad i \neq 0, 1$

alors $d(v_0, v_1) = (v_0 - v_1, -T(v_0) + v_0)$
 \Rightarrow suite exacte:
 $0 \rightarrow V^T \rightarrow V \oplus V \xrightarrow{d} V \oplus V \rightarrow V_T \rightarrow 0$ \square

Faisceaux constructibles sur

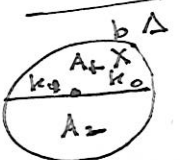
$(\Delta, 0)$:

Prop: La catégorie $\text{Const}(\Delta, 0)$ est équivalente à la cat

obj: (V_0, V_1, g, T)
 $V_0 \xrightarrow{g} V_1 \in \mathcal{T}$
ev dim finie
 $(1-T)g=0 \Leftrightarrow \text{Im } g \subset V_1^T$

V_0 : fibre au 0
 V_1 : fibre au 1
 T : monodromie
 g : morph de généralisation

Démo: à la Čech
 $V_0 = \Delta - k_0$
 $V_1 = \Delta - k_1$
 $V_0 \cap V_1 = A_0 \sqcup A_2$



\mathcal{V} n'a pas de cohomologie (sauf H^0) sur U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ (contractile)

Cx de Čech: $\Gamma(\mathcal{V}, V_0) \oplus \Gamma(\mathcal{V}, V_1) \xrightarrow{d} \Gamma(\mathcal{V}, V_0 \cap V_1)$
 $\Gamma(\mathcal{V}, V_0) \oplus \Gamma(\mathcal{V}, V_1) \xrightarrow{d} \Gamma(A_+; \mathcal{V}) \oplus \Gamma(A_-; \mathcal{V})$ ①

morph: ce dont on s'attend

Rq: cat eq à la catégorie des chemins sortants de Treumann.

Rq: cas particulier du précédent.

Rq: perversité moitié

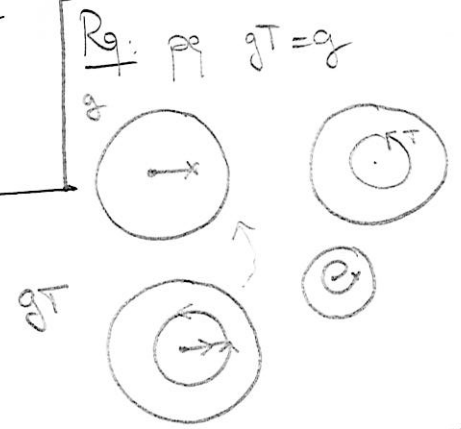
Rq: 1-vo iso \Leftrightarrow 1-vo iso

ici, sinon on change la condition " $\leq -d_X$ ".

Rq: Dualité de Verdier passe à

$D_X: \text{Perv}(X, Y) \rightarrow \text{Perv}(X, Y)^{op}$
(p = moitié, sinon complètement aux)

Def: $\text{Perv}(X, Y) := \mathcal{D}^{\leq 0} \cap \mathcal{D}^{\geq 0}$



Prop: 1) $\text{Perv}(\Delta, 0)$ est une cat ab.

2) Pour $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} \in \text{Perv}(X, Y)$
 $\mathcal{C}: \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ morph dans $\text{Perv}(X, Y)$

et ces = dualité linéaire
 $D_X(\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G})$
 $\mathcal{F} \xrightarrow{u} \mathcal{G}$

Exemples:

$i_*: \text{fof} \hookrightarrow \Delta; j_*: \Delta^* \hookrightarrow \Delta$

$i_* V: V \rightarrow 0 \hookrightarrow \Delta$

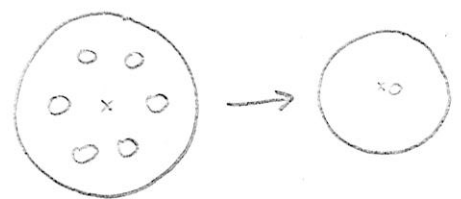
quatre-ciel
 $j_*(V; T): 0 \rightarrow V \hookrightarrow T$

"extension par 0"

$j_*(V; T): V^T \hookrightarrow V \hookrightarrow T$

$f: \Delta \rightarrow \Delta$ (me \mathbb{N})
 $z \mapsto z^m$

$f_* \mathbb{K}_\Delta \in \text{Const}(\Delta, 0)$



$k \xrightarrow{\text{diag}} k^m \xrightarrow{T} k$ T: permutation cyclique
 $s \mapsto (s, \dots, s)$

Faisceaux pervers
 (X, Y) stratifié $X = \coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$
 $\dim X_\alpha =: d_\alpha$

$\mathcal{D}_{\text{const}}^b(X, Y) = \mathcal{D}$: triangulée

en dérivé, on a des deux adjonctions $f^* \rightarrow f_*$
 $f_! \rightarrow f^!$
via dérivé

Opérations de Grothendieck.

$\mathcal{D}^{\leq 0} := \{ \mathcal{F} \mid \forall \alpha, u_\alpha^* \mathcal{F} \in \mathcal{D}_\alpha^{\leq -d_\alpha} \}$
cohom. concentrée au plus $\leq -d_\alpha$

$\mathcal{D}^{\geq 0} := \{ \mathcal{F} \mid u_\alpha^! \mathcal{F} \in \mathcal{D}_\alpha^{\geq -d_\alpha} \}$

où $(\mathcal{D}_\alpha^{\leq 0}, \mathcal{D}_\alpha^{\geq 0})$ t-structure com.

sur $\mathcal{D}^b(\text{loc}(X_\alpha))$
 X_α, f_{X_α}

$\text{loc}(X_\alpha) := \mathcal{D}_\alpha^{\leq 0} \cap \mathcal{D}_\alpha^{\geq 0}$

On a équivalences entre
(i) C exacte (admissible)
(ii) $\exists h: \mathcal{Y}_0 \rightarrow \mathcal{F}[-1]$
 \hookrightarrow triangle distingué

On a des foncteurs de troncature perverse

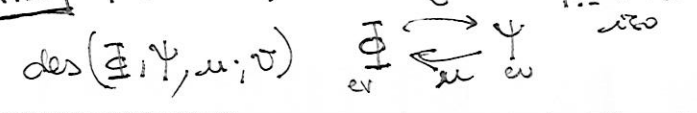
$P_{\leq i}^b: \mathcal{D}_{\text{const}}^b(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{const}}^b(X, Y)$
 $P_{\geq i}^b$

et des foncteurs "cohomologie perverse"

$P_{H^i}^b: \mathcal{D}_{\text{const}}^b(X, Y) \rightarrow \text{Perv}(X, Y)$
 $\mathcal{F}_i \rightarrow P_{\geq 0}^b P_{\leq 0}^b(\mathcal{F}[i])$

$\text{Perv}(\Delta, 0)$

Thm $\text{Perv}(\Delta, 0)$ est équivalente à la cat des $(\mathcal{F}, \Psi, u; \nu)$



a) Construction de Ψ

$\mathcal{F} \in \text{Perv}(\Delta, 0)$
 $i_0: \{0\} \hookrightarrow \Delta, j_0: \Delta^* \hookrightarrow \Delta$
 $i_0^* \mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\leq 0}, j_0^* \mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\leq -1}$
 $i_0! \mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\geq 0}, j_0! \mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\geq -1}$
Rappel: $j_0^* = j_0!$ (restriction à Δ^*)
 $\rightarrow j_0^* \mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\leq -1} \cap \mathcal{D}^{\geq -1}$
 La " Δ^* " [1]

$j_0^* \mathcal{F} = \mathbb{V}[1]$
 $\Psi =$ fibre générique de \mathbb{V}
 "cycles propres"
 T : monodromie

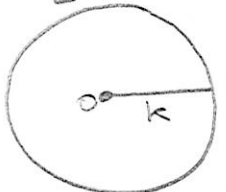
b) Étudions un peu mieux la perversité

[...] Les seuls groupes de cohomologie ev^+ non nuls de \mathcal{F} sont $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{H}^0(\mathcal{F})$.

$j_0^* \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}) = \mathbb{V}$
 $j_0^* \mathcal{H}^0(\mathcal{F}) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{F})$ supporté en $\{0\}$
 $\mathcal{H}^{-1}(i_0! \mathcal{F}) = 0 (= \underline{H}_{\{0\}}^{-1}(\mathcal{F}))$

c) Aparté
 On cherche des foncteurs exacts
 $\text{Perv}(\Delta, 0) \rightarrow \text{Vect}_k$
 idée: fibre en 0 (pb pas concentré) en 1 seul degré

$i_0^* \mathcal{F}$ en degrés hom. 0 et 1.

d) Lemme de coupe
 Δ 
 notation: $\underline{H}_k^n(\mathcal{F}) := \begin{cases} \text{constructible} \\ \in \text{Const}(\Delta, \Delta-k \llcorner k \text{ ou } 0) \end{cases}$
 $\mathcal{H}^n(i_0! i_0^* \mathcal{F}) = i_0^* \mathcal{H}^n(i_0! \mathcal{F})$
 $i_0^* k \hookrightarrow \Delta, j_0: \Delta-k \hookrightarrow \Delta$

Lemme $\mathcal{F} \in \text{Perv}(\Delta, 0)$
 $\underline{H}_k^n(\mathcal{F}) = 0$ pour $n \neq 0$

\Rightarrow foncteurs exacts
 $\mathcal{F} \mapsto \left(\underline{H}_k^n(\mathcal{F}) \right)_k, \forall n$

e) Construction de \mathbb{F}, u, v

\mathbb{F} : "cycles évanescents"
 On a une suite exacte
 $0 \rightarrow \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}) \rightarrow j_0^* \Psi_{\Delta-k} \xrightarrow{\alpha} \underline{H}_k^0(\mathcal{F})$
 [vient du triangle $i_0! \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_0^* \mathcal{F} \rightarrow 0$]
 $\mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F}) \rightarrow 0$
 fibre en b.

$0 \rightarrow \mathcal{H}^{-1}(\mathcal{F})_b \rightarrow j_0^* \Psi_{\Delta-k} \rightarrow \underline{H}_k^0(\mathcal{F})_b \rightarrow 0$
 $\downarrow \cong \quad \downarrow \cong \quad \downarrow \cong$
 $0 \rightarrow \Psi \rightarrow \Psi \oplus \Psi \rightarrow \Psi \rightarrow 0$
 $\cong \rightarrow (u, T(u))$

Posons $\mathbb{F} := \underline{H}_k^0(\mathcal{F})_b$
 On a donc $v: \mathbb{F} \rightarrow \Psi$ (généralisation)
 et $u: \Psi \rightarrow \mathbb{F}$ (fibre de α en 0)
 α commute à la généralisation $\Rightarrow T = 1 - uv$

Exemples $i_0: \{0\} \hookrightarrow \Delta, j_0: \Delta^* \hookrightarrow \Delta$
 $i_0^* \mathbb{V}: \mathbb{V} \hookrightarrow 0; \mathbb{V}_{-\Delta}[1]: 0 \hookrightarrow \mathbb{V}$

$$j_0! \underline{V}_{\Delta^x}[1]: \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\circ} & V \\ \circ \downarrow & \circ \leftarrow & \downarrow \circ \\ V & \xrightarrow{\circ} & V \end{array}$$

$$j_{0*} \underline{V}_{\Delta^x}[1]: \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\circ} & V \\ \circ \leftarrow & \circ & \downarrow \circ \\ V & \xrightarrow{\circ} & V \end{array}$$

Triangle distingué

$$\underbrace{i_{0!} i_0^! \underline{V}_{\Delta^x}[1]} \rightarrow \underline{V}_{\Delta}[1] \rightarrow \underbrace{j_{0*} j_0^* \underline{V}_{\Delta^x}[1]}_{\underline{V}_{\Delta^x}} \xrightarrow{+1}$$

$\downarrow V_{\{0\}}[-2]$
 en faisant tourner

$$\underline{V}_{\Delta}[1] \rightarrow j_{0*} \underline{V}_{\Delta^x}[1] \rightarrow i_{0*} V_{\{0\}} \xrightarrow{+1}$$

Ces 3 objets sont des faisceaux pervers donc, on a une suite exacte courte dans $\text{Perv}(\Delta, 0)$

$$0 \rightarrow \underline{V}_{\Delta}[1] \rightarrow j_{0*} \underline{V}_{\Delta^x}[1] \rightarrow i_{0*} V_{\{0\}} \rightarrow 0$$

De même, on a:

$$0 \rightarrow i_{0*} V_{\{0\}} \rightarrow j_0! \underline{V}_{\Delta^x}[1] \rightarrow \underline{V}_{\Delta}[1] \rightarrow 0$$

$\underline{V} = \underline{k}$: $j_0^! \underline{k}_{\Delta^x}[1]$ pas un objet simple
 ($Z \neq$ division donnée par les fibres)

Def: $\underline{V} \in \text{Loc}(\Delta^x)$, $j_0^* \underline{V}[1]$ et $j_0! \underline{V}[1]$ sont dans $\text{Perv}(\Delta, 0)$

On définit

$$j_0^! \underline{V}[1] := \text{Im}(j_0^! \underline{V}[1] \rightarrow j_{0*} \underline{V}[1])$$

C'est un objet simple de la catégorie
 Les objets simples sont les $j_0^! \underline{V}[1]$
 et $i_{0*} \underline{k}_{\{0\}}$ pour \underline{V} simple.

$$j_0^! (V, T)[1] \quad \text{Im}(1-T) \quad \sum_{i=1}^n V$$

Général: (X, Y)

$$U_0 \xrightarrow{j_0} U_1 \xrightarrow{j_1} U_2 \dots \xrightarrow{j_n} U_n = X$$

$$\underline{\mathbb{I}} C_X := \tau^{\leq -1} j_{n-1*} \tau^{\leq 0} \dots \tau^{\leq -dx} j_{0*} \underline{k}_{U_0}[dx]$$

$$\simeq j_0^! \underline{k}_{U_0}[dx]$$

Fait: les objets simples de $\text{Perv}(X, Y)$

sont les $(i^* S)_* \underline{\mathbb{I}} C_S$ pour S strate

$$j_0^! (V, T)[1] = \tau^{\leq -1} j_0^* (V, T)[1]$$

	$\{0\}$	Δ^x
-1	V^T	V
0	V^T	

Foncteurs sphériques

(Amo-lognienko)

P_b : cat triangulées \mathcal{F} avec morph pas fonctoriel.

Contexte: on travaille dans un contexte "amélioré" où

ona des cones fonctoriels.
 cat tri = $H^0(\text{dy cat})$

Def: Soit $s: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$
 un foncteur triangulé qui a un adj à gauche
 droite \mathcal{R} .

foncteurs de twist

$$T := \text{Cone}(SR \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{B}})$$

$$T^! := \text{Cone}(\text{id}_{\mathcal{B}} \Rightarrow SL)[1]$$

foncteurs de "cotwist"

$$F := \text{Cone}(\text{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RS)[1]$$

$$F^! := \text{Cone}(LS \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{A}})$$

S'est dit sphérique si

- 1) $T: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ est une auto-equiv
- 2) $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

3) $LT[1] \rightarrow L(SR) \cong (LS)R \rightarrow R$ iso
 4) $R \rightarrow R(SL) \cong (RS)L \rightarrow FL[1]$ iso
 (Rq: il suffit de 2 param 4).
 Dans ce cas, $T' =$ quasi-inverse de T
 $F' = \text{---} F$

$\mathcal{A} = \mathcal{D}^b(\text{Vect}_k) = \mathcal{D}^b(\text{pt}) \xrightarrow{a^*} \mathcal{D}^b(S^d) = \mathcal{B}$
Prop: C'est un foncteur sphérique.
 Plus généralement, pour $f: X \rightarrow Y$ une S^d -fibration entre CW-complexes
 $f^*: \mathcal{D}^b(Y) \rightarrow \mathcal{D}^b(X)$ est un foncteur sphérique.

Lemme Pour $F \in \text{Perv}(\Delta, 0)$
 on a $H_k^n(F) = 0 \quad \forall n \neq 0$

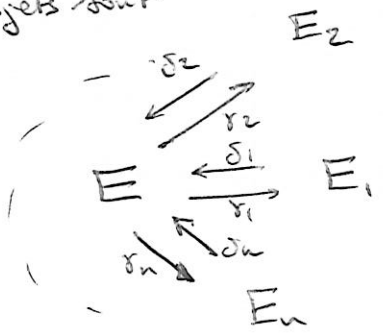
Dém: récurrence sur n \square

Posons $E := H_k^0(F)_0$
 $E_i := H_k^0(F)_{\neq 0}$

Lemme: si $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sphérique alors
 $\mathcal{A} \xrightleftharpoons[R]{S} \mathcal{B}$ et $\mathcal{A} \xrightleftharpoons[S]{L} \mathcal{B}$ donnent lieu
 à des faisceaux pervers sur $(\Delta, 0)$ après
 passage au k_0
 $k_0(\mathcal{A}) \xrightleftharpoons[k_0 R]{k_0 S} k_0(\mathcal{B})$

Adjoint à droite $R = a_*$
 gauche $L = a^*[d]$
 parce que $a_! = a_*$
 $a^! = a^*[d]$

On a $\gamma_i: E \rightarrow E_i$
Prop: $\text{Perv}(\Delta, 0)$ est équivalente
 à la catégorie dont
 les objets sont

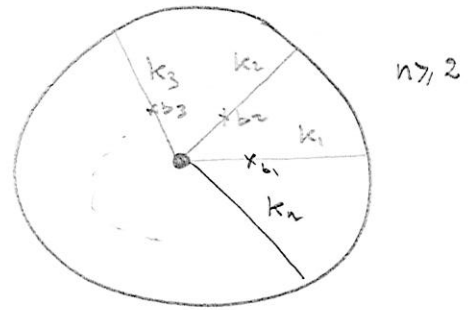


qui vérifient $\gamma_i \delta_i = \text{id}_{E_i}$

- $\gamma_i := \gamma_i \delta_i: E_i \rightarrow E_i$ est un iso
- $\gamma_i \delta_i = \text{id}_{E_i}$
- $i \neq j, j+1 \text{ mod } n \Rightarrow \gamma_i \delta_j = 0$

Dém: $SR \rightarrow \text{id} \Rightarrow T \xrightarrow{+1}$
 \downarrow
 $k_0(T) = 1 - k_0(S)k_0(R) \quad \square$

Faisceaux pervers sur les surfaces
 stratification des surfaces = nombre fini
 de pts.

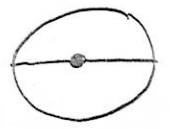


Déf: Un Schobers pervers sur $(\Delta, 0)$
 est un foncteur sphérique

Ex: S^d : sphère de dim d
 $a: S^d \rightarrow \text{pt}$

$k := k_1 \cup \dots \cup k_n$
 et même démarche qu'avant.

Ex: $n=2$
 $E_2 \rightleftharpoons E \rightleftharpoons E_1$



Cas particulier d'un thm sur les
arrangements d'hyperplans réels
($\mathbb{C}^n \supset UH$).

$\Rightarrow \uparrow$ foncteurs exacts !

Démo: cas du disque $\xrightarrow{\text{recollé}} \square$

Rq: T_i "racine n ième de la monodromie"

Prop: $\text{Perv}(S, N)$ est équivalente
à la catégorie formée

Soit S une surface compacte à bord ∂S
 $S^\circ := S - \partial S$.

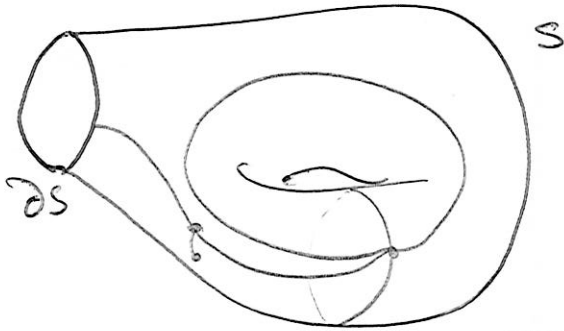
- $\forall v \in \text{Vert}(K), E_v$ vecteur finie
- $\forall e \in \text{Edge}(K), E_e$ _____
- $\forall h$ demi-arête, $E_v \xrightleftharpoons[\delta_h]{\delta_h} E_e$
pr $\bullet \text{---} e$

Soit K un "graphe couvrant" de S i.e
 $K \hookrightarrow S^\circ \hookrightarrow K \hookrightarrow S$ est un
graphe de S i.e $K \hookrightarrow S^\circ$ équiv
d'homotopie.

- Vérifiant
- pour x 1-valent,
 $1 - \gamma_h \delta_h : E_e \rightarrow E_e$ iso
 - pour x valence ≥ 2
 $\gamma_h \delta_h = 1$

- $\textcircled{d'}$ $\begin{matrix} c' \\ \swarrow \\ a \\ \searrow \\ c \end{matrix}$ $\gamma_{c'} \delta_a : E_e \rightarrow E_{c'}$ iso
- $\textcircled{d''}$ $\begin{matrix} c \\ \swarrow \\ a \\ \searrow \\ c \end{matrix}$

si h suit h dans l'ordre cyclique
(pour une orientation de la surface)
et 0 sinon



$N := \text{Vert}(K)$

Prop $\forall \mathcal{F} \in \text{Perv}(S, N)$

$$\underline{H}_k^{\mathbb{Z}}(\mathcal{F}) = 0 \quad n \neq 0$$

[KS]:
construction
générale pr
les graphes
enrubann.

\hookrightarrow ensuite pour une var symple : on utilise
le squelette lagrangien